#### **Research article**

#### Available in: http://jips.ippi.ac.ir

Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian), Vol. 35, No. 6, 567-582 February-March 2023 ISSN: 1016-3255 Online ISSN: 2008-0883 DOI: 10.22063/JIPST.2023.3358.2119

# Studies on the Effectiveness of Some Multicomponent Material Models with Hyper-viscoelasticity and Stress Softening for SBR/Carbon Black Compounds Under Two Loading Modes

Mir Hamid Reza Ghoreishy\* and Foroud Abbassi Sourki

Department of Rubber Processing and Engineering, Faculty of Polymer Processing, Iran Polymer and Petrochemical Institute, P.O. Box 14975-112, Tehran, Iran

Received: 4 March 2023, accepted: 31 May 2023

# **ABSTRACT**

**Methods**: Three rubber compounds were prepared based on SBR reinforced by three different amounts of carbon blacks and underwent uniaxial cyclic under two loading/unloading rates and volumetric tests. The experimental data were used for the determination of parameters of three complex material models using a nonlinear curve fitting method. These models were selected based on the results of our previous findings. We have verified the uniaxial condition of the chosen test method and sample size using finite element method. The computed parameters were employed to simulate cylindrical rubber samples prepared from the same compounds through the finite element method using Abaqus code under compressive-contact loads. The predicted results were next compared with their experimentally measured data.

**Findings**: The results showed that the effectiveness of a material model in the prediction of stress-strain or stress-time behavior of a rubber compound under a simple load case does not necessarily guarantee that the same level of accuracy is obtained for the other loading modes, especially for highly filled compounds. It is shown here that to obtain accurate results in such cases, in addition to hyper-viscoelastic and stress softening equations, the material model should include proper terms to consider the effect of the filler-filler interactions into account, especially for highly carbon black-loaded compounds. It is found that the best model is the one in which the viscoelastic behavior of the filler-filler structure is independently included.

(\*)To whom correspondence should be addressed. E-mail: M.H.R.Ghoreishy@ippi.ac.ir

#### Please cite this article using:

Ghoreishy M.H.R. and Abbassi Sourki F., Studies on the Effectiveness of Some Multicomponent Material Models with Hyperviscoelasticity and Stress Softening for SBR/Carbon Black Compounds Under Two Loading Modes, *Iran. J. Polym. Sci. Technol.* (*Persian*), **35**, 567-582, 2023.

### Keywords:

rubber, mechanical behavior, loading mode, finite element method, hyper-viscoelastic

# بررسی کارایی برخی مدلهای مواد چندجزئی با ابرگرانروکشسانی و نرمشدگی تنش در آمیزههای SBR–دوده با دو شیوه بارگذاری

# میرحمیدرضا قریشی\*، فرود عباسی سورکی

تهران، پژوهشگاه پلیمر و پتروشیمی ایران، پژوهشکده فرایند پلیمرها، گروه لاستیک، صندوق پستی ۱۱۲–۱۴۹۷۵

دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۱۳، یذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۱۰

#### مقاله پژوهشی

دسترس پذیر در نشانی: http://jips.ippi.ac.ir

مجله علوم و تكنولوژى پليمر، سال سى وينجم، شماره ۶، صفحه ۸۲۵–۵۶۷ ۵۶۲۰ ISSN: 1016-3255 Online ISSN: 2008-0883 DOI: 10.22063/JIPST.2023. 3358.2119

چکيده

فرضیه: معمولاً برای تعیین پارامترهای مدلهای مکانیکی در آمیزههای لاستیکی از برازش دادههای تجربی بهدست آمده از آزمون های ساده (مانند کشش تکمحوری) استفاده می شود. با توجه به پیچیدگی رفتار مکانیکی این مواد که از معادله های چندجزئی ابرگران روکشسان همراه با معادله نرم شدگی تنش تشکیل شده اند، ضروری است تا کار آمدی این معادله ها در پیش بینی در ست و کامل نتایج برای قطعاتی که با شیوه های گوناگون زیر بار کشش، فشار و برش قرار می گیرند، بررسی و راستی آزمایی شوند. روش ها: سه آمیزه لاستیکی بر پایه کائوچوی SBR با مقادیر مختلف دوده ساخته شده و روی آن ها آزمون کشش تکمحوری چرخه ای با دو سرعت بارگذاری –باربرداری و تراکم پذیری حجمی انجام شد. داده های بهدست آمده برازش شده روی سه مدل مکانیکی که در آن ها رفتارهای ابرکشسان، گران رو و اساس پژوه شهای پیشین انجام شد. به دنبال آن ابتدا تکمحوری بودن آزمون کشش استفاده شده راستی آزمایی شد و سپس این پارامترها برای شبیه سازی قطعه استوانه ای ساخته شده از آمیزه ها مزبور به کمک روش جزء محدود زیر بار فشاری –تماسی قرار گرفتند. نتایج حمی انجام شد و دو می آن ها

**یافتهها**: نتایج نشان داد، اثر بخشی یک مدل در پیش بینی رفتار تنش-کرنش یا تنش-زمان در یک حالت یا شیوه بارگذاری تضمینی برای رسیدن به همان دقت در سایر شیوههای بارگذاری نیست. طبق نتیجه این مطالعه، برای پیش بینی دقیق تر باید از معادله پیچیده غیر خطی استفاده کرد. در این مدل ها باید افزون بر درنظر گرفتن رفتار های ابرگران روکشسان و نرم شدگی تنش، از مدلی که رفتار شبکه پرکننده-پرکننده را نیز درنظر بگیرد، به ویژه برای آمیزههای دارای مقادیر زیاد دوده استفاده شود. به طور مشخص در این کار نشان داده شد، بیشترین دقت به مدلی مربوط است که در آن رفتار گران روکشسان پرکننده-پرکننده به صورت جداگانه از رفتار گران روکشسان آمیزه پلیمر درنظر گرفته شده باشد. واژههای کلیدی

لاستیک، رفتار مکانیکی، شیوه بارگذاری، روش جزء محدود، ابرگرانروکشسان

\* مسئول مكاتبات، پيامنگار: M.H.R.Ghoreishy@ippi.ac.ir

#### مقدمه

رفتار مکانیکی مواد لاستیکی در برابر بارهای واردشده، منحصر بهفرد و از پیچیدگیهای خاصی برخوردار است. این مواد رفتاری غیرخطی همراه با تراکمناپذیری زیاد نشان میدهند. از اینرو، بیان دقیق آن مستلزم استفاده از معادلهها ابرکشسان است. از سوی دیگر، همانند سایر پلیمرها پدیدههای گرانروکشسانی در آنها دیده شده که به معنی وابستگی رفتار به زمان و سرعت بارگذاری است. افزون بر این ها، زمانی که در ساخت آمیزههای لاستیکی از پرکنندههای تقویتی با ساختار کلوخهای-خوشهای همانند دوده یا سیلیکا در مقادیر زیاد استفاده می شود، آمیزه ها رفتار نرم شدگی تنش در بارگذاری های تناوبی و نیز مانایی دائمی نشان میدهند. بنابراین، برای توصیف رفتار دقیق آمیزههای لاستیکی به معادلات پیچیده و چندجزئی نیاز است. این موضوع را پژوهشگران بسیار زیادی مطالعه کردهاند و تاکنون نیز مدلهای متعدد و معادلههای مختلفی بدین منظور ارائه شدهاند. در این مدلها از اجزای کشسان و گرانرو استفاده شده است که بهصورت موازی با یکدیگر قرارگرفتهاند. فراوانی این پژوهشها به أن دليل است كه هر أميزه لاستيكي با توجه به نوع پليمر، پركننده و سامانه يخت، رفتاري انحصاري نشان مي دهد. بنابراين ضرورت دارد تا مدل ویژهای برای همان نوع آمیزه توسعه داده شود. مسئله مهم درباره معادلههای چندجزئی آن است که روابط ریاضی که بدین منظور استفاده می شوند، دارای جمله های گوناگون بوده تا قابلیت درنظرگرفتن همه رفتارهای لاستیک (غیرخطیبودن، تراکمناپذیری، وابستگی به زمان و سرعت بارگذاری و نرمشدگی تنش) را داشته باشند. به همین دلیل تعداد پارامترهای مدل ماده برای یک آمیزه زیاد است که تعیین دقیق آنها را با دشواری روبهرو میسازد. از سوی دیگر، تعیین پارامترهای این مدلها با توجه به هزینه و در دسترس بودن تجهيزات معمولاً بر اساس داده های آزمون های ساده (نظير كشش) انجام مي شود. اما بايد توجه داشت، قطعات لاستيكي بهویژه تایر اغلب تحت بارهای مختلف و ترکیبی (کششی، فشاری، برشی و خمشی) دینامیکی قرار میگیرند. از اینرو، هنگام تحلیل تنش با روش جزء محدود ضرورت دارد تا از کارآمدی مدل انتخابی و پارامترهای آن اطمینان کافی حاصل شود. بهعبارت دیگر، پس از انتخاب و تعیین پارامترهای یک مدل، ضروری است تا نشان داده شود، مدل مزبور و پارامترهای آن برای سایر شیوههای بارگذاری معتبر است و قابلیت کاربرد دارد. این موضوع یکی از اولین و مهمترین چالش های مدل های پیشنهادی برای مواد لاستیکی است که همچنان مورد توجه پژوهشگران قرار دارد.

در مقاله حاضر نتایج پژوهش انجامشده درباره ارزیابی عملکرد

مدلهای مختلف برای پیش بینی رفتار آمیزههای لاستیکی در شیوههای بارگذاری ارائه شده است. همانطور که در پیشینه پژوهش به آن اشاره می شود، کارهای انجامشده در این زمینه منحصر به رفتار کشسان و مستقل از زمان است. بر اساس جست وجوهای مطالعاتی انجامشده تاكنون نتايجي مبنى بر مطالعه عملكرد مدلهاي چندجزئي که در آنها افزون بر کشسانی، رفتارهای گرانروکشسانی و نرمشدگی تنش (رفتارهای وابسته به زمان و ناکشسان) نیز بررسی شده باشد، با هدف عملکرد مدل برای پیش بینی رفتار در شیوههای بارگذاری مختلف ارائه نشده است. مدلهای متعددی را می توان برای بیان رفتار سهگانه آمیزههای لاستیکی توسعه داد که برخی از آنها در کارهای پیشین نویسندگان مقاله آورده شده که در قسمت بعد بررسی می شود. با توجه به عملکرد این مدل ها سه مدل انتخاب شد. نو آوری ویژه این کار در سنجش عملکرد سه مدل چندجزئی با درنظر گرفتن رفتار سهگانه کشسانی، گرانروکشسانی و نرمشدگی تنش است. در ادامه، ابتدا پیشینه موضوع بهطور مختصر بررسی شده و سپس مبانی مدلسازی ریاضی بیانکننده رفتار مکانیکی آمیزههای لاستیکی با درنظرگرفتن سه رفتار گفتهشده بحث می شود. در این قسمت سه مدل انتخاب شده و نظریه هریک ارائه می شود. پس از آن با معرفی مواد و آمیزههای استفادهشده و نحوه انجام آزمون، در ادامه نحوه تعیین پارامترهای مدل شرح داده می شود. در این کار از سه آمیزه لاستیکی بر پایه کائوچوی SBR تقویتشده با مقادیر مختلف دوده (۲۰، ۴۰ و ۶۰ قسمت بهازای ۱۰۰ قسمت لاستیک) استفاده شد. بهدنبال آن مدل اجزای محدود آزمون فشاری برای اعتبارسنجی و راستی آزمایی مدلهای انتخابی و پارامترهای بهدست آمده از آزمون کششی معرفی می شود. در نهایت، یافته های حاصل از پژوهش ارائه مي شود.

## پیشینه پژوهش

بررسی فعالیتهای پژوهشی در این زمینه با توجه به نوآوری کار حاضر انجام می شود که مطالعه کارآمدی مدلهای مواد در شیوههای مختلف بارگذاری است. از اولین کارهای جامع انجام شده در این زمینه می توان به پژوهش های Yeoh [۲،۱] اشاره کرد. وی در این دو مقاله نشان داد، پارامترهای به دستآمده از یک آزمون (مثلاً کششی) مقاله نشان داد، پارامترهای به دستآمده از یک آزمون (مثلاً کششی) در صورتی می تواند برای حالت دیگری از بارگذاری (برشی) به کاربرده شود که مقدار <sub>ا</sub> الا/40 بسیار بزرگ تر از <sub>2</sub>ا6/40 و نیز مستقل از <sub>1</sub> باشد (W، <sub>1</sub> ا و <sub>2</sub> به ترتیب چگالی انرژی کرنشی و ناورداهای اول و دوم تانسور تغییر شکل چپ هستند. برای تعریف دقیق تر به مرجع ۳ مراجعه شود). بر این مبنا او مدل پدیده نگری

(phenomenological) را پیشنهاد کرد که در آن چگالی انرژی کرنشی (W) تنها تابعی از I<sub>1</sub> باشد. همچنین، وی برای غیرخطی درنظرگرفتن مدول برشی لاستیک، تابع انرژی کرنشی را تا درجه سه درنظر گرفت. در پژوهش دیگری Arruda و Boyce [۴] یک مدل دروننگر (mechanistic) را توسعه دادهاند که در آن بهکمک نظریه آماری غیرگوسی Langevin مدلی با تنها دو پارامتر شامل مدول برشی اولیه و نسبت قفل شدگی ارائه شد که برابر با حداکثر افزایش طول زنجیر است. از ویژگیهای این مدل نیز قابلیت کاربرد یارامتر های بهدست آمده از یک آزمون کشش ساده برای سایر شیوههای بارگذاری عنوان شد. Marlow [۵] مدلی انتگرالی را ارائه کرد که در آن دادههای آزمون کشش تکمحوری بهطور مستقیم و بدون استفاده از مدل ریاضی مشخص وارد محاسبات جزء محدود می شود. در این مدل فرض شده است، چگالی انرژی کرنشی فقط تابعی از ناوردای اول (همانند مدل Yeoh) باشد. عملکرد مدل یادشده را قریشی [۶،۷] بررسی کرد و نشان داد، در مقایسه با سایر مدلها عملکرد متوسطی دارد. پژوهشهای دیگری نیز در این حوزه انجام شده است و مدلهای مختلفی (پدیدهنگر و دروننگر) ارائه شدهاند. از جمله این ها می توان به مدل Carrol [۸] اشاره کرد که مدلی نسبتاً ساده و پدیدهنگر است. بعدها این مدل را Melly [۹] بهبود داد. اگرچه هر دو این مدلها افزون بر ناوردای اول به ناورداهای دوم نیز وابسته هستند، اما مقایسه نتایج آنها با دادههای ارائهشده در مقالهها انطباق قابل قبولي را نشان ميدهد. او سعى كرد تا با اضافهكردن جمله ناوردای دوم به توان نیم (یعنی  $\sqrt{I_2}$ ) ضمن درنظر گرفتن این جمله (که در معادله های پیشین نظیر معادله Yeoh از آن صرفنظر شده بود)، خطای ناشی از حذف آن را کاسته و نیز با اضافه کردن جمله ناوردای اول به توان ۴، اثر ناوردای دوم در مقابل ناوردای اول را کم نگه دارد. Carrol [۱۰] در مقاله دیگری مدلی دروننگر را توسعه داد که بر پایه نظریه آماری غیرگوسی Langvin است. این مدل مشابه مدل ارائهشده توسط Arruda و Boyce [۴] بود و نتایج با دادههای تجربی دیگران مقایسه شد. نوآوری کار او در ارائه روش جدیدی برای محاسبه معکوس تابع Langevin بود. در این زمینه چند کار مروری نيز بهچاپ رسيده است كه از جمله آنها مي توان به مقالات He و همکاران [۱۱] و Melly و همکاران [۱۲] اشاره کرد.

همان طور که در مقدمه اشاره شد، نوآوری این کار در سنجش قابلیت تعمیم نتایج بهدست آمده از آزمونی ساده (معمولاً کشش) به حالتهای دیگر بارگذاری برای مدلی مشخص است. همه پژوهش های عنوان شده به حالت رفتار کشسان مستقل از زمان اختصاص داشتند. بنابراین در این پژوهش سعی شد تا سنجش یادشده برای مدل های

چندجزئی مختلفی انجام شود که تاکنون معرفی شدهاند. بهعنوان مثال می توان به مدلهای Bergstrom و Borge [۱۳،۱۴]، هارس همکاران [۱۵،۱۶]، قریشی و عباسی [۱۹–۱۷] و قریشی و همکاران [۲۰] اشاره کرد. در مطالعاتی که گروه پژوهشی نویسنده مقاله در سالهای اخیر انجام دادهاند [۲۱–۷۱۷]، این مهم ارزیابی و معادلههای چندجزئی و ترکیبی متعددی معرفی و کارایی آنها بررسی و مطالعه شدهاند. در این کارها روشهای عددی و نرمافزاری گوناگونی ارائه و با بهکارگرفتن آنها پارامترهای مدل تعیین و راستیآزمایی شدند. از میان مدلهای گوناگون سه مدلی انتخاب شدند که پیشتر در مقالههای این گروه پژوهشی بررسی شده بودند، در ادامه نیز درباره آنها توضیحات لازم داده شده است.

#### مدلهای مواد

برای بیان رفتار مکانیکی آمیزه های لاستیکی که در آن پدیده های نام برده درنظر گرفته شده باشد، معمولاً از مدلی استفاده می شود که در آن بخش های بیان کننده رفتار کشسان و گران رو به صورت موازی با یکدیگر قرار گرفته اند. شکل ۱ طرح کلی چنین مدلی را نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود یک جزء کشسان (L) به صورت موازی با تعدادی اجزای کشسان و گران رو دیگر (S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>, ..., S<sub>N</sub>) قرار گرفته است که خود به صورت متوالی به هم متصل شده اند. این مدل ها را به اصطلاح مدل چار چوب رئولوژیکی موازی می نامند. در این مدل مقدار تنش Cauchy ی و تانسور گرادیان تغییر شکل (F) اعمال شده به ترتیب با معادله های زیر داده شده اند:

$$\sigma_{\text{total}} = \sigma_{L} + \sigma_{S_1} + \sigma_{S_2} + \dots + \sigma_{S_N} \tag{1}$$



Fig. 1. An schematic view of the parallel rheological framework model.

 $\mathbf{F}_{\text{total}} = \mathbf{F}_{\text{L}} = \mathbf{F}_{\text{S}_1} = \mathbf{F}_{\text{S}_2} = \ldots = \mathbf{F}_{\text{S}_{\text{N}}} \tag{(Y)}$ 

بسته به معادلههای ابرکشسان و گرانروهای انتخابی و نیز تعداد اجزا، مدلهای مختلفی ایجاد میشود. شایان ذکر است، رفتار نرمشدگی تنش در مدل ابرکشسان انتخابی برای جزء (L) درنظر گرفته میشود. از میان حالتهای گوناگون، سه مدلی انتخاب و عملکرد آنها ارزیابی شد که پیشتر در پژوهشهای انجامشده [۱۹–۱۷] استفاده شده بودند. این مدلها با نام مدلهای A، B و C نامگذاری شدند که در ادامه بحث میشوند.

مدل A

در این مدل فرض شده است، جزء L با معادله ابرکشسان Yeoh [۲] بیان شود. در این معادله تابع چگالی انرژی کرنشی با معادلههای زیر داده می شود:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{dev} + \mathbf{U}_{vol} \tag{(7)}$$

$$U_{dev} = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3$$
(\*)

$$U_{vol} = \frac{1}{D_1} (J-1)^2 + \frac{1}{D_2} (J-1)^4 + \frac{1}{D_3} (J-1)^6$$
 (a)

در این معادله ها  $U_{dev}$  و  $U_{vol}$  به ترتیب قسمت های انحرافی و حجمی تابع چگالی انرژی کرنشی و  $O_1$ ،  $O_2$ ،  $O_2$ ،  $O_2$ ،  $O_2$  و  $D_3$  ثابت های ماده هستند. مقدار مدول توده ( $\kappa$ ) برابر با  $2/D_1$  است. همچنین  $\overline{I}$  و به ترتیب ناوردای اول بخش انحرافی تانسور تغییر شکل چپ ( $\overline{B}$ ) و دتر مینان ژاکوبین تانسور گرادیان تغییر شکل (F) هستند که با معادله های زیر داده شده اند:

$$\overline{I}_{1} = \text{trace}(\overline{B}) = \text{trace}(J^{\frac{2}{3}}F.F^{T})$$
(9)

$$\mathbf{J} = \det\left(\mathbf{F}\right) \tag{V}$$

تانسور تنش Cauchy از روی معادله چگالی انرژی کرنشی و معادله (۸) محاسبه میشود:

$$\sigma = \frac{2}{J} F \frac{\partial U}{\partial C} F^{T} + \frac{\partial U}{\partial J} \delta_{ij}$$
(A)

در این معادله C تانسور راست Cauchy-Green بوده که از رابطه در این معادله C تابع Kronecker Delta است. بنابراین، C= $F^{T}F$ تنش Cauchy در جزء کشسان مدل ( $\sigma_{L}$ ) برابر خواهد شد با:

$$\sigma_{L} = \eta \left( \frac{2}{J} [C_{10}^{L} + 2C_{20}^{L}(\bar{I}_{1} - 3) + 3C_{30}^{L}(\bar{I}_{1} - 3)^{2}] dev[\overline{B}] \right) + \frac{2}{D_{1}^{L}} (J - 1)I + \frac{4}{D_{2}^{L}} (J - 1)^{3}I + \frac{6}{D_{3}^{L}} (J - 1)^{5}I$$
(9)

که I ماتریس واحد و  $I[\Lambda] = [\Lambda] - \frac{1}{3}$ trace[ $\Lambda$ ] است. همچنین،  $\eta$  پارامتر تخریب بوده که برای درنظر گرفتن پدیده نرمشدگی تنش یا اثر Mullins [۲۲،۲۳] با معادله (۱۰) داده شده است:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r} \operatorname{erf}\left(\frac{U_{dev}^{max} - U_{dev}}{m + \beta U_{dev}^{max}}\right)$$
(1.)

در این معادله m ،r و β پارامترهای ماده و U<sup>max</sup> بیشینه کمیت U<sub>dev</sub> است. برای قسمت گرانروکشسان، در این مدل فرض شده جزء گرانروکشسان تنها از یک شاخه (N=I) تشکیل شده که در آن تنش Cauchy بهصورت زیر داده شده است:

$$\sigma_{S_1} = \sigma_{S_1}^e = \sigma_{S_1}^v \tag{11}$$

که نمادهای e و v بهترتیب به دو جزء کشسان و گرانرو در شاخه S<sub>۱</sub> (شکل ۱) اشاره دارد. از سوی دیگر، گرادیان تغییرشکل در این شاخه با استفاده رابطه ضربی (multiplicative) بهدست می آید:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{S}_{1}} = \mathbf{F}_{\mathbf{S}_{1}}^{\mathbf{e}} \mathbf{F}_{\mathbf{S}_{1}}^{\mathbf{v}} \tag{11}$$

مقدار تانسور تنش Cauchy برای جزء کشسان شاخه  ${}_{1}S_{1}$  نیز با معادله مقدار تانسور تنش Cauchy (معادله (۹)) داده می شود. در اینجا برای تفکیک تنش در جزء کشسان اصلی (شاخه L) از جزء کشسان در شاخه  ${}_{1}S_{2}$ کمیت جدیدی با نام نسبت سفتی یا  ${}_{8}S_{1}$  تعریف می شود. این کمیت برابر با نسبت تنش در شاخه  ${}_{1}S_{1}$  تعریف می شود. این کمیت برابر با نسبت  ${}_{8}S_{1}$  تنش در شاخه  ${}_{8}S_{1}$  تعریف تنش در شاخه L برابر با  ${}_{8}S_{1}$  می شود. بدیهی است. افزایش  ${}_{8}S_{1}$ به معنی افزایش اثر اتلافی خواهد بود. برای محاسبه تنش در اجزای به معنی افزایش اثر اتلافی خواهد بود. برای محاسبه تنش در اجزای تغییر شکل (یعنی  ${}_{8}S_{1}$  و  ${}_{8}S_{1}$ ) تعیین شوند. بدین منظور باید معادله دیفرانسیل زیر همراه با معادله (۱۲) حل شود [ ${}_{7}S_{1}$ ]: میرحمیدرضا قریشی، فرود عباسی سورکی

$$\dot{F}_{S_{1}}^{v} = \dot{\gamma}_{S_{1}}^{v} (F_{S_{1}}^{e})^{-1} \frac{dev[\sigma_{S_{1}}]}{\left\| dev[\sigma_{S_{1}}] \right\|_{F}} F_{S_{1}}^{e} F_{S_{1}}^{v}$$
(1V)

(Frobenius norm) Frobenius که  $\|\det[\sigma_{s_1}]\|_F$  برای  $\|\det[\sigma_{s_1}]\|_F$  برای است و به صورت  $\dot{\gamma}^v_{s_1}$  برای  $\|\Lambda\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(\Lambda\Lambda^T)}$  برای مدل حاضر با رابطه پیشنهادی Bergstrom و IP،۱۴] Boyce داده شده است:

$$\dot{\gamma}_{S_{1}}^{v} = \dot{\gamma}_{0} \left(\lambda_{S_{1}}^{v} - 1 - \xi\right)^{c} \left[ R \left( \frac{\tau}{\tau_{base}} - \hat{\tau}_{cut} \right) \right]^{m}$$
(1A)

در این معادله،  $\dot{\gamma}_0$  کمیتی است که بهمنظور یکسانسازی ابعادی تعریف شده و برابر ۱ درنظر گرفته می شود. غ پارامتری است که برای افزایش دقت در مقادیر کم تغییر شکل به معادله اضافه می شود و نوعی پارامتر ماده به شمار می آید. (R(X) یک تابع متوسط گیری بوده و با رابطه  $2/(|\mathbf{x}| + |\mathbf{x}|) = \mathbf{R}$  داده شده است.  $\hat{\tau}_{cut}$  تنشی است که کمتر از آن هیچ جریان گران رویی روی نخواهد داد. همچنین:

$$\overline{\lambda_{S_1}^{v}} = \sqrt{\frac{tr[B_{S_1}^{v}]}{3}}$$
(19)

گفتنی است، در این معادلهها کم،  $\hat{\tau}_{cut}$ ، m، c، جزو ثابتهای مدل هستند که باید تعیین شود.

## مدل C

این مدل بر اساس کار جدیدی [۱۹] که نتایج آن اخیراً چاپ شده توسعه یافته است. ویژگی اصلی مدل در این است که مقدار N برابر ۲ درنظر گرفته شده است. به عبارت دیگر فرض شد، مدل افزون بر جزء کشسان دارای دو شاخه گران روکشسان است. در آن کار نشان داده شد، اگر به شکل کلاسیک مدل که در آن از یک شاخه گران روکشسان استفاده شده است، شاخه گران روکشسان جدیدی افزوده شود که بیان کننده رفتار شبکه پرکننده-پرکننده باشد، در آن صورت دقت مدل در پیش بینی رفتار آمیزه به ویژه در آن هایی افزایش می یابد که دارای مقادیر زیاد پرکننده هستند. در این مدل رفتار جزء کشسان (L) با معادله (۹۵) (معادله (۹)) همراه با مدل نرم شدگی تنش ارائه شده در معادله (۱۰) بیان می شود. برای اولین شبکه گران روکشسان از مدل های Yeoh (معادله (۹)) همراه با شکل ویژه ای از مدل Bergstrom-Boyce است.

$$\dot{\gamma}_{S_{1}}^{v} = \dot{\gamma}_{0} \left( \overline{\lambda_{S_{1}}^{v}} - 1 - \xi \right)^{c} \left( \frac{\tau}{\hat{\tau}} \right)^{m} \tag{(7.)}$$

$$\dot{F}_{S_{1}}^{v} = \dot{\gamma}_{S_{1}}^{v} (F_{S_{1}}^{e})^{-1} \left( \frac{3 \text{dev}[\sigma_{S_{1}}]}{2q} \right) F_{S_{1}}^{e} F_{S_{1}}^{v}$$
(17)

در این معادله q تنش Cauchy معادل یا مؤثر بوده که بهصورت Cauchy تنش  $q^{s_1}$  معادله بوده که بهصورت  $\frac{\gamma_{s_1}}{2} \det[\sigma_{s_1}] : \det[\sigma_{s_1}]^{\frac{1}{2}}$  معادله سرعت کرنش معادل بوده که برای مدل حاضر از معادله (۱۴) داده شده است:

$$\dot{\gamma}_{S_{1}}^{\nu} = \dot{\gamma}_{0} \left( \left( \frac{\tau}{\hat{\tau} + \alpha < p} \right)^{n} \left[ (m+1) \gamma_{S_{1}}^{\nu} \right]^{m} \right)^{\frac{1}{m+1}}$$
(14)

در این معادله τ تنش کیرشهٔف (τ=Jq)، γ<sup>v</sup><sub>si</sub> کرنش معادل و و فشار کیرشهف هستند. همچنین کمیتهای â، a، n، m و γُ پارامترهای ماده بوده که باید تعیین شوند. مدل انتخابی، معادله توانی نیز خوانده میشود.

### مدل B

در این مدل نیز فرض شده است، یک شاخه کشسان (L) و یک شاخه گران(وکشسان (S<sub>1</sub>) وجود داشته باشد (I=N). برای رفتار ابرکشسان از معادله هشت-زنجیر استفاده شده است که مدل Arruda-Boyce نیز خوانده می شود [۴]. در این مدل، رابطه بین تنش (σ) Cauchy و کرنش بر حسب نسبتهای کشیدگی بیان می شوند که با معادله (۱۵) داده شده است:

$$\sigma = \frac{\mu}{J\overline{\lambda^*}} \frac{L^{-1}(\overline{\lambda^*}/\lambda_L)}{L^{-1}(1/\lambda_L)} dev[\overline{B}] + \kappa(J-1)I$$
(10)

در این معادله،  $\mu$  مدول برشی اولیه،  $\lambda_{\rm L}$  حداکثر نسبت کشیدگی زنجیرهای پلیمری و  $\kappa$  مدول توده بوده که هر سه از پارامترهای ماده هستند که باید از دادههای تجربی تعیین شوند. همچنین [•]<sup>L-1</sup> تابع معکوس Langvein و  $\overline{\lambda}$  کشیدگی زنجیر را بیان می کند که با معادله (۱۶) داده شده است:

$$\overline{\lambda^*} = \sqrt{\frac{\operatorname{tr}[\overline{B}]}{3}} \tag{19}$$

همچنین بهمنظور درنظرگرفتن اثر Mullins (نرمشدگی تنش)، جمله اول معادله (۱۵) برای جزء کشسان (L) در کمیت η (معادله (۱۰)) ضرب می شود. برای شاخه گرانروکشسان (<sub>I</sub>) نیز به روش مشابه با مدل A، از معادلههای (۱۱) تا (۱۳) استفاده می شود با این تفاوت که معادله دیفرانسیل (۱۳) به صورت زیر نوشته می شود:

جله علمی، علوم و تکنولوژی پلیمر، سال سیوپنجم، شماره ۶، بهمن−اسفند ۱٤۰۱

در این معادله کم، r و  $\hat{\tau}$  جزو ثابتهای مدل هستند که باید تعیین شوند. گفتنی است، برای جمله حجمی در معادله Yeoh تنها اولین عبارت  $\left(\frac{1}{D_1}(J-I)^2\right)$  استفاده شد. برای دومین شاخه (S<sub>2</sub>) که به بیان رفتار شبکه پرکننده-پرکننده می پردازد، از مدل کشسان خطی (ضریب کشسانی یانگ همراه با نسبت پوآسون) و شکل ساده غیر خطی برای رفتارهای کشسان و گران رو استفاده شده که به شکل معادله (۲۱) است:

$$\dot{\gamma}_{S_{1}}^{v} = \left(\frac{\tau}{\hat{\tau}}\right)^{m} \tag{(1)}$$

در این معادله m و î جزو ثابتهای مدل هستند که باید تعیین شوند.

## تجربى

## مواد

سه آمیزه لاستیکی بر پایه کانوچوی SBR امولسیون گونه 1712 طراحی شد. برای تقویت آمیزه های ساخته شده از دوده N330 با مقادیر ۲۰، ۴۰ و ۶۰ جزء به ازای صد قسمت کانوچو (phr) استفاده شد. از این آمیزه ها پیش تر برای مطالعه رفتار چرخ های لاستیک استفاده شده بود [۸۸]. در همه آمیزه ها از سامانه پخت نیمه کارا استفاده شد. جزئیات فرمول بندی آمیزه ا در جدول ۱ آمده است.

#### دستگاهها و روشها

اختلاط أميزهها با مخلوطكن دوغلتكي مدل L Schwabenthan 200 L

جدول ۱- فرمولبندي آميزهها.

مشدگی تنش در آمیزههای .	زئی با ابرگران/وکشسانی و نر	بررسی کارایی برخی مدلهای مواد چندج

انجام شد. برای تعیین زمان پخت بهینه نمونهها از رئومتر نوسانی دیسکدار استفاده شد. پخت آمیزهها با پرس ۱۰۰ تن مدل Bucher ساخت سوئيس انجام شد. دو مجموعه نمونه تهيه شد. در مجموعه اول ابتدا ورقههایی با ضخامت ۲ mm شکل داده شدند. سیس، از این ورقهها نمونههای نواریشکل با ابعاد ۱۱ cm (طول) و ۲ cm (عرض) بریده شده و در آزمون کششی رفتوبرگشتی (پنج چرخه) قرار گرفتند. بهمنظور درنظرگرفتن اثر زمان (سرعت اعمال کرنش) هر نمونه دو بار با سرعتهای ثابت ۱۰۰ و ۵۰۰ mm/min در آزمون قرار گرفتند. شرایط آزمون و ابعاد نمونه مزبور به گونهای است که حالت کشش تکمحوری در آن بهوجود میآید. اثبات اینکه توزیع تنش و کرنش در این نمونهها، تکمحوری است، بعدتر در بخش نتایج و بحث توضيح داده مي شود. برتري انتخاب نمونه با ابعاد نامبرده نسبت به نمونه دمبلی شکل در آن است که اثر زمان و سرعت اعمال کرنش و نیز نرمشدگی تنش در نمونههای یادشده بیشتر از نمونههای دمبلی دیده میشود. از اینرو، برای پژوهش هایی که اثر کشسان گرانرویی در آنها مهم باشد، بسیار مناسبتر هستند. همچنین، از آزمون تراکم حجمى براى اندازه گیرى مقدار تراكمپذیرى آمیزه هاى ساخته شده استفاده شد. برای این کار ابتدا نمونه استوانهای تویر با روی هم قراردادن نمونه های قرصی شکل بریده شده از ورقه های لاستیکی، تهیه شد. به دنبال آن استوانه مزبور درون فضای توخالی که از سه جهت محصورشده قرار داده شد، با میلهای فولادی فشرده شده و تغییرات نیرو برحسب فشردگی آن ثبت شد [۱۹]. در مجموعه دوم نمونههای استوانهای از آمیزههای تهیهشده با ابعاد ۲۹ mm (قطر) و ۱۲/۷ mm (ارتفاع) مطابق استاندارد ISO-7743 ساخته شد. سیس، این نمونهها زیر بار عمودی رفتوبرگشتی (سه چرخه) قرارگرفتند و تغییرات

Table 1. Compound formulation.

G 1 1 ( 1

Ingradiant		e (pm)	Chamical/Trada Nama	Supplier		
Ingredient	SE20	SE40	SE60	Chemical/ Hade Name	Supplier	
SBR	137.5	137.5	137.5	Emulsion SBR 1712 (Oil extended with 37.5 phr Aromatic oil)	Bandar Imam, Iran	
ZnO	5	5	5	Zinc Oxide, ZnO	Pars Oxide, Iran	
St. Acid	2	2	2	Stearic Acid (St. Acid)	Rhein Chemie	
6PPD	2	2	2	N-(1,3-dimthylbutyl)-Ń-phenylenediamine (Dusantox)	Duslo, Slovakia	
TMQ	1	1	1	Poly(1,2-dihydro-2,2,4-trimethyl-quinoline)	Duslo, Slovakia	
TBBS	1.5	1.5	1.5	N-tertbutyl-2-benzothiazyl sulphenamide	Henan Kailun	
TMTD	0.5	0.5	0.5	Tetramethylthiuram Disulfide	Henan Kailun	
Sulfur	2	2	2	Sulfur	Tesdak, Iran	
Black Filler	20	40	60	Carbon Black (N-330)	Iran Carbon Co.	

مجله علمی، علوم و تکنولوژی پلیمر، سال سیوپنجم، شماره ۶، بہمن–اسفند ۱٤۰۱

٥٧٣

نیرو-جابهجایی در آنها ثبت شد.

#### مدل اجزاي محدود

در اينجا مدل اجزاي محدود نمونه فشاري معرفي شده است كه نتايج بهدست آمده بعدتر ارائه و تحليل مي شوند. مدل اجزاي محدود نمونه فشاری بهصورت مدل دوبعدی با تقارن محوری درنظر گرفته شد. برای سطوح بالایی و پایینی از شرط سطح تماس همراه با اصطکاک استفاده شد. انتخاب مقدار عددی برای ضریب اصطکاک با توجه به کار پژوهشی Lazeration [۲۵] انجام شد. در آن کار بر اساس اندازه گیری های تجربی نشان داده شد، ضریب اصطکاک لاستیک ها روى سطوح مختلف با افزايش فشار بهصورت نمايي با معادله ( $\mu = AP^{-1}/k$ ) کاهش می یابد که فشار تماسی بر حسب مگایاسکال و A و k پارامترهای ثابت هستند و بهطور تجربی تعیین می شوند. بر اساس این مطالعات، مقادیر یادشده برای یک نمونه آمیزه رویه تایر روی سطوح فولادی به ترتیب ۱/۷۹ و ۵ گزارش شدند. از سوی دیگر، مقدار فشار تماسی در آزمونهای اندازه گیری از مقادیر کم در ابتدای آزمون شروع می شود و تا مقادیر زیاد ۷۰۰ MPa افزایش می یابد. بدین ترتيب در اين محدوده فشار مقدار متوسط ضريب اصطكاك حدود ٧/ است که همین مقدار نیز در محاسبات درنظر گرفته شد. مدل اجزای محدود ساخته شده از ۶۰۰ اجزای دوبعدی با تقارن محوری درجه دوم تشکیل شد. برای دستیابی به مقدار بهینه تعداد و اندازه اجزا از روش شبکهبندی انطباقی (adaptive meshing) استفاده شد. مراحل پیش پردازش، پردازش و پس پردازش با نرمافزار Abaqus [۲۶] انجام شد. شکل ۲ مدل اجزای محدود مطالعه شده را نشان می دهد. نوع تحلیل انجامشده Visco\* و غیرخطی است که در آن آثار ابرکشسانی و



شکل ۲- مدل اجزای محدود نمونه استوانهای زیر بار عمودی فشاری. Fig. 2. Finite element model of cylindrical sample under vertical compressive load.

گران روکشسانی همراه با نرم شدگی تنش درنظر گرفته شدند. بیشینه مقدار فشردگی برای نمونه های SE20 و SE40 برابر ٪۲۵ و برای نمونه SE60 با توجه به سفتی بیشتر آن ٪۱۵ درنظر گرفته شدند. در همه موارد سرعت تغییر شکل ۱۰ mm/min انتخاب شد. شایان ذکر است، مدل ماده A جزو مدل هایی است که در کتابخانه نرمافزار Abaqus وجود دارد. اما، برای دو مدل B و C باید زیربرنامه های اختصاصی نوشته شود. بدین منظور از کتابخانه مدل های مواد PolyUMOD

## نتايج و بحث

# دستیابی به رویکرد بهینه برای اصلاح لاستیک ماتریس اعتبارسنجی تکبعدی

پیش از ارائه نتایج اصلی لازم است تا نمونههای ساخته شده برای آزمون کشش که به صورت نوارهایی با اندازه cm ۲×۱۱ هستند، از لحاظ تکمحوری بودن کشش راستی آزمایی شوند. برای جسم جامدی که زیر بار کشش تکمحوری قرارگرفته باشد، معادله (۲۲) برای نسبتهای کشیدگی برقرار است [۳]:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \lambda_2 = \lambda_3 \tag{(YY)}$$

که <sub>۱</sub>۸، <sub>۵</sub> و <sub>۸</sub>۸ بهترتیب نسبتهای کشیدگی در جهتهای اصلی هستند. بر این اساس تانسور گرادیان تغییرشکل با معادله (۲۳) داده می شود:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda_1} \end{bmatrix}$$
(YY)

بنابراین برای کرنشهای اسمی در سه جهت اصلی میتوان نوشت:

$$\varepsilon_1 = \lambda_1 - 1 \tag{74}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{1 - \sqrt{1 + \varepsilon_1}}{\sqrt{1 + \varepsilon_1}} \tag{Ya}$$

برای نشاندادن معتبربودن شرایط کشش تکمحوری در آزمون کشش نمونههای یادشده کافی است تا معادله (۲۵) برقرار باشد. بدین منظور نمونه کشش با روش جزء محدود و درنظرگرفتن مدل ماده ابرکشسان و بهصورت سهبعدی با نرمافزار Abaqus شبیهسازی

شد. شکلهای ۳ (a) تا (c) بهترتیب توزیع کرنشهای عمودی بههمراه مقادیر عددی این کمیتها را برای ناحیه مرکزی نمونهها نشان میدهد. همان طور که مشاهده می شود، بخش بسیار زیادی از نمونهها دارای کرنش یکسان و یکنواخت هستند که تأییدی بر اثر غالب کشش در نمونه است. افزون بر آن مقدار عددی کرنش در جهت طولی برابر ۱/۵۳ است (شکل ۳ (a)). اگر این مقدار در معادله (۲۵) قرار داده شود، مقدار کرنشهای عمودی در دو جهت دیگر مساوی و برابر ۱/۳۷۱ – به دست می آید. با مقایسه این مقدار با مقادیر نشان داده شده در شکل ۳ (d) و (c) یعنی ۳/۰۰ – که از کشش تک محوری برقرار است. همچنین در شکلهای ۳ (d) و (f) کرنش های برشی نشان داده شده است، می توان نتیجه گرفت، شرط محاسبه شده کرنش های برشی در ناحیه اصلی نمونه چند مرتبه بزرگی محاسبه شده کرنش های برشی در ناحیه اصلی نمونه چند مرتبه بزرگی تایید دیگری بر تک محوری بودن آزمون کشش است.

#### تعیین پارامترهای مدل

برای تعیین پارامترهای مدلهای مواد A، B و C، دادههای بهدستآمده از آزمون کشش رفتوبر گشتی در دو سرعت کشش ۱۰۰ و ۵۰۰ mm/min همراه با دادههای آزمون تغییرات حجم با نرمافزار MCalibration [۲۷] مورد برازش غیرخطی قرار گرفتند. در این نرمافزار ابتدا با الگوریتم جستوجوی اتفاقی یک مجموعه حدس اولیه برای پارامترهای مواد مدل انتخابی تعیین شده و سپس اختلاف بین دادههای تجربی و مقادیر پیش بینی شده با مدل محاسبه می شود. به دنبال آن به کمک الگوریتم های بهینه سازی، پارامترهای جدیدی تعیین میشود، بهگونهای که اختلاف مزبور کاهش یابد. این نرمافزار با توجه پیچیدگی مدل و تعداد زیاد پارامترهایی که باید تعیین شوند، مجموعهای از الگوریتمهای بهینهسازی را بهکار میگیرد. بدین صورت که نخست از الگوریتم Levenberg-Marquardt استفاده میکند. پس آن و پس از چند تکرار کار با الگوریتمی ارائهشده توسط Powel با نام NEWUOA، ادامه یافت و سرانجام از الگوریتم پرکاربرد Nelder-Mead برای دستیابی به جوابهای نهایی بهره گرفته شد. ورودی در هر مرحله از خروجی مرحله پیشین تأمین شده است تا سرانجام پارامترها با کمترین خطای بین دادههای تجربی و پیش بینی شده بهدست آیند. جزییات الگوریتم های بهینه سازی را می توان در مرجع ۲۸ یافت. مقادیر عددی این پارامترها برای سه مدل مزبور در جدولهای ۲ تا ۴ داده شدهاند. در این کمیتها، طول، زمان و تنش بهترتیب با واحدهای میلیمتر، ثانیه و مگاپاسکال بیان شدهاند.

همچنین در این جدولها مقادیر ضریب همبستگی (R<sup>2</sup>) نیز داده شدهاند که معیاری از دقت مدلها در برازش دادههای تجربی هستند. شکلهای ۴ (a) تا (c) تغییرات تنش اسمی برحسب زمان، اندازه گیری شده و پیش بینی شده با مدل های B، A و C را در سه آمیزه مطالعهشده در این پژوهش با سرعت کشش ۱۰۰ mm/min نشان میدهد. به روش مشابه همین تغییرات برای سرعت کشش ۵۰۰ mm/min در شکلهای ۵ (a) تا (c) آورده شدهاند. در هر دو سرعت کشش ۱۰۰ و ۵۰۰ mm/min بر اساس مقادیر ضرایب هم بستگی محاسبه شده، مشاهده می شود، هر سه مدل برای مقادیر ۲۰ و ۴۰ phr دوده (آمیزههای SE20 و SE40) دقت بسیار خوبی را در پیش بینی رفتار کششی نشان میدهند. اما در ۶۰ phr دوده (آمیزه SE60) فقط مدل A دقت خوبی داشته و دقت مدل های C و B به ویژه در کرنش های زیاد، متوسط است. البته با مقایسه مدل های B و C دیده می شود، مدل C که در آن از سه شاخه استفاده شده دقت بهتری دارد. از این نتایج چند نکته بهدست می آید. نخست اینکه همان طور که انتظار می رود، با افزایش مقدار پرکننده و در نتیجه قویترشدن شبکه پرکننده-پرکننده رفتار آمیزه نیز پیچیدهتر میشود. بنابراین، پیشبینیهای انجامشده با مدل B که رابطه گرانرو سادهتری (معادله (۱۸)) نسبت رابطه گرانرو مدل A (معادله (۱۴)) دارد، دقت کمتری دارد. افزون بر آن رفتار کشسان مدل B با معادله دروننگر Arruda-Boyce (معادله (۱۵)) بیان شده که بر پایه فرض قرارگرفته هشتزنجیر در یک اجزای مکعبی است. از آنجا که در این مدل اثر اتصال زنجیرهای لاستیک به ذرات پرکننده درنظر گرفته نشدهاند، بنابراین با افزایش پرکننده از اعتبار فرض یادشده بهدلیل افزایش و تقویت اتصالهای بین زنجیرها کم می شود و در نتیجه برهم خوردن ساختار هشتزنجیر در یک مکعب کاهش مییابد. بنابراین، دقت این مدل در پیش بینی رفتار مکانیکی نیز کم میشود. از سوی دیگر، اگرچه معادلهای گرانرو در مدل C (معادلههای (۲۰) و (۲۱)) از دو مدل دیگر سادهتر هستند. اما، چون در مدل مزبور شاخه سومی برای درنظرگرفتن رفتار شبکه پرکننده درنظر گرفته شده است، بنابراین دقت آن بیشتر می شود. برای آزمون تغییرات حجم نیز در شکلهای ۶ (a) و (c) نمودار تغییرات تنش اسمی برحسب کرنش اسمی بهدستآمده برای سه آمیزه مطالعهشده و سه مدل انتخابی نشان داده شدهاند. مشاهده می شود، بهترین انطباق برای نتایج آزمون تراکمپذیری به مدل A مربوط است. دلیل موضوع آن است که تنها در این مدل از معادله غیرخطی برای بیان جمله حجمی در معادله چگالی انرژی کرنشی استفاده می شود و بنابراین بهراحتی می توان رفتار غیرخطی تنش برحسب کرنش را در آزمون مزبور شبيهسازي كرد.





شکل ۳- توزیع کرنش اسمی در نمونه نواری شکل: (a) عمودی در جهت ۱ (b) عمودی در جهت ۲ (c) عمودی در جهت ۲ (c) عمودی در جهت ۳ (b) عمودی در جهت ۳ (c) عمودی در جهت ۳ (c) عمودی در جهت ۳ (c) برشی <sub>11</sub>3، (c) برشی <sub>12</sub>3، (c) برشی <sub>13</sub>3، (c) برشی <sub>13</sub>3، (c) برشی (c) بر (c) بر (c) برشی (c) بر (c) ب

Fig. 3. Distribution of nominal strain in tape sample: (a) normal  $\varepsilon_{11}$ , (b) normal  $\varepsilon_{22}$ , (c) normal  $\varepsilon_{33}$ , (d) shear  $\varepsilon_{12}$ , (e) shear  $\varepsilon_{13}$  and (f) shear  $\varepsilon_{23}$ .

und BE00.					
Model	Parameter	SE20	SE40	SE60	
Eight chain	μ	0.4475	0.4853	0.9491	
model	$\lambda_{L}$	8.0209	2.0685	2.8105	
(Eq. 15)	κ	10.727	13.182	15.912	
Stress softening	r m	4.365 0.4545	3.3223 0.3115	1.9283 0.799	
model (Eq. 10)	β	0.0087	0.0515	0.0404	
	$S_{R}$	0.4174	0.8206	0.5752	

Table 3. Predicted parameters of the model B for SE20, SE40 and SE60

	-			
(Eq. 15)	κ	10.727	13.182	15.912
Stress softening	r m	4.365 0.4545	3.3223 0.3115	1.9283 0.799
(Eq. 10)	β	0.0087	0.0515	0.0404
	$S_{R}$	0.4174	0.8206	0.5752
Viceour	t <sub>base</sub>	0.2025	0.3144	0.7343
viscous	с	-1.5506	-0.751	-1.838
(Eq. 17)	m	10.497	7.9037	9.2705
	$\hat{ au}_{\scriptscriptstyle cut}$	0	2E-05	5E-05
	يح	0.0048	0.0002	0.0008

0.959

 $\mathbb{R}^2$ 

0.948

مجله علمی، علوم و تکنولوژی پلیمر، سال سیوپنجم، شماره ۶، بهمن–اسفند ۱٤۰۱

0.945

پارامترهای بهدستآمده را می توان بهخوبی مورد راستی آزمایی قرار داد. شکل های ۸ (a) و (c) نمودار تغییرات نیرو بر حسب زمان را در نمونه زیر بار فشاری برای سه مدل انتخابی نشان میدهد. همانطور که مشاهده می شود، هر نمونه در سه چرخه بارگذاری قرار گرفت. از نمودارهای دادهشده در این شکل ها مشاهده می شود، برای مقادیر ۲۰ و ۴۰ phr دوده (آمیزههای SE20 و SE40) مدلهای A و B جوابهای تقریباً یکسان و با یک مقدار خطا بین دادههای تجربی و پیشبینی شده میدهند. بهترین انطباق در اینجا به مدل C مربوط است. اما، برای آمیزه SE60 ساخته شده با ۶۰ phr دوده، اختلاف بین داده های تجربی و پیش بینی شده با دو مدل A و B به ویژه در چرخههای دوم و سوم افزایش شایان توجهی یافته در حالی که بیشترین انطباق نیز همچنان متعلق به مدل C است. از این مشاهده چند نکته حاصل می شود. نخست آنکه دقت زیاد یک مدل (مانند مدل A) در پیش بینی رفتار در شیوه کششی (بیشتربودن ضرایب همبستگی) تضمین کننده رسیدن به همان مقدار دقت در سایر شیوهها نیست. این نکته را پیشتر نیز سایرین مشاهده کرده بودند (به بخش ييشينه يژوهش مراجعه شود). همچنين افزايش مقدار دوده موجب

Correlation

coefficient

Model	Parameter	SE20	SE40	SE60
	C <sub>10</sub>	0.3238	0.4559	2.7365
	C <sub>20</sub>	-0.0061	0.0317	0.3495
reon	C <sub>30</sub>	0.0009	2E-06	4E-05
	$D_1$	0.1324	0.1196	0.0802
(Eq. 9)	D <sub>2</sub>	0.0047	0.0011	0.0011
	D <sub>3</sub>	2E-05	0.0046	0.0215
Stress	r	2.1504	3.2266	2.1597
model (Eq. 10)	m	1.2384	0.2157	0.6112
	β	0.1507	0.0424	0.0083
	S <sub>R</sub>	0.280299	0.4928	0.8708
Viscous model (Eq. 14)	$\hat{ au}$	0.1599	0.2523	0.7616
	n	7.3296	7.1354	2.3959
	m	-0.139	-4E-04	-0.197
	а	0.0074	0.0026	0.0004
	$\dot{\gamma}_0$	0.9026	0.2872	1.3496
Correlation coefficient	R <sup>2</sup>	0.972	0.982	0.967

Table 2. Predicted parameters of the model A for SE20, SE40 and SE60.

#### مدل سازی زیر بار فشاری

همانطور که پیشتر عنوان شد، روش کار در این پژوهش بدین ترتیب بود که ابتدا پارامترهای مدلهای مواد بهدست آمده از آزمونهای کشش، در مدل اجزای محدود نمونههایی استفاده شد که زیر بار فشاری قرار گرفته بودند و عملکرد هر مدل با توجه به مقدار انطباق بین داده های تجربی و مقادیر پیش بینی شده سنجیده شد. شکلهای ۷ (a) و (d) توزیع کرنش اسمی در نمونه فشاری زیر بار را بهترتیب برای کرنشهای اسمی <sub>۵۱</sub>، <sub>22</sub>، ۶<sub>33</sub> و <sub>۱2</sub> نشان میدهد. همانطور که مشاهده می شود، برخلاف حالت کششی، نهتنها توزیع يكنواختي وجود ندارد، بلكه مرتبه آنها نيز در يك محدوده است. بهعنوان مثال، بیشینه کرنش های اسمی عمودی NE11، NE23 و NE33 و كرنش برشى NE12 به ترتيب ۱/۳۱، ۱/۳۱ و ۱/۹۷ هستند. اين نكته نشاندهنده آن است كه تغيير شكل ايجادشده، چندبعدي و تلفيقي از تغییر شکل های کششی، فشاری و برشی است. بنابراین قابلیت مدل و

#### میرحمیدرضا قریشی، فرود عباسی سورکی



شکل ۴- تغییرات تنش بر حسب زمان در سرعت کشش ۱۰۰ mm/min. دادههای اندازه گیریشده تجربی و پیش بینی شده با (a) مدل A، (b) مدل B و (c) مدل C.

Fig. 4. Stress vs. time at extension rate of 100 mm/min.Experimentally measured data and predicted by (a) model A,(b) model B, and (c) model C.

Table 4. Predicted parameters of the model C for SE20, SE40 and SE60.

Model	Parameter	SE20	SE40	SE60
Vaah madal	C <sub>10</sub>	0.1	0.1379	0.3794
	C <sub>20</sub>	0.013	0.0115	0.0116
(Eq. 9)	C <sub>30</sub>	-0.001	0.0006	0.0018
(Branch L)	k	8.081	11.093	14.406
Stress softening	r	1.144	1.0159	2.2173
model	m	0.655	1.2421	0.7539
(Eq. 10)	β	0.119	0.0162	0.0084
Vaah madal	C <sub>10</sub>	0.006	0.1017	0.3383
(Eq. 0)	C <sub>20</sub>	0.375	0.0001	-0.01
(Eq. 9)	C <sub>30</sub>	-0.411	1E-06	-0.012
(Branch $S_1$ )	k	11.67	14.986	18.383
	ξ	0.008	0.01	0.007
Viscous model	с	-1.225	-0.891	-0.627
(Eq. 19)	$\hat{ au}$	6.21	2.8997	8.3076
	m	1.202	4.6061	1.1814
Elastic	F	0.031	0 3686	0.3102
properties	L	0.412	0.3000	0.2191
$(Branch S_2)$	V	0.412	0.4049	0.5181
Viscous	^	6 824	14 402	14 846
model	τ	15 37	5 7332	5 8472
(Eq. 20)	m	15.57	5.1552	5.0772
Correlation coefficient	R <sup>2</sup>	0.969	0.965	0.958

پیچیدهترشدن رفتار آمیزه لاستیک میشود، بنابراین اختلاف بین دادههای تجربی و پیشبینی شده نیز افزایش می یابند (شکل ۸ (c)). از سوی دیگر، مدل هایی که در آن ها رفتار ابر کشسان با معادله Yeoh بیان شده باشد، عملکرد بهتری در پیشبینی رفتار گران رو کشسان و نرم شدگی تنش دارند. این به دلیل قابلیت زیاد آن در پیش بینی رفتار در شیوه های مختلف بارگذاری است. در مجموع مدل C بهترین گزینه برای پیش بینی رفتار در حالت های مختلف بارگذاری به شمار می آید. دلیل این موضوع به در نظر گرفتن شاخه سوم در معادله های ابر کشسان گران رو برمی گردد که در آن اثر شبکه پر کننده - پر کننده لحاظ شده است [1].



EXP-SE20-500 EXP-SE40-500 EXP-SE60-500 SE20-MAT-A □ <u>∧</u> ◊ MAT-A-500 3.6 3.2 2.8 Stress (MPa) 2.4 2 1.6 1.2 0.8 0.4 0 20 40 0 60 80 100 120 140 Time (s) (a) EXP-SE20-500 EXP-SE40-500 EXP-SE60-500 SE20-MAT-B ∧ ♦ MAT-B-500 3.6 3.2 2.8 Stress (MPa) 2.4 2 1.6 1.2 0.8 0.4 0  $\dot{20}$ 40 60 120 140 0 80 100 Time (s) (b) EXP-SE20-500 EXP-SE40-500 EXP-SE60-500 SE20-MAT-C MAT-C-500 3.6 3.2 2.8 Stress (MPa) 2.4 2 1.6 1.2 0.8 0.4 0 40 20 60 120 0 80 100 140 Time (s) (c)

شکل۶- تغییرات تنش برحسب کرنش در آزمون حجمسنجی. دادههای اندازهگیریشده تجربی و پیشبینیشده با مدلهای A، B و C برای نمونه (a) SE60 (d) SE40 و (c) SE60.

Fig. 6. Stress vs. strain in volumetric test. Experimentally measured data and predicted by Model A, B, C for sample (a) SE20, (b) SE40, and (c) SE60.

شکل ۵- تغییرات تنش بر حسب زمان در سرعت کشش ۵۰۰ mm/min. دادههای اندازه گیری شده تجربی و پیش بینی شده با (a) مدل A، (b) مدل B و (c) مدل C.

Fig. 5. Stress vs. time at extension rate of 500 mm/min.Experimentally measured data and predicted by (a) model A,(b) model B, and (c) model C.



شکل ۷- توزیع کرنش اسمی در نمونه فشاری: (a) ،٤<sub>11</sub> ه، (c) ،٤<sub>22</sub> (c) ه و ٤<sub>33</sub> (c) .

Fig. 7. Distribution of nominal strain in compression sample: (a)  $\varepsilon_{11}$ , (b)  $\varepsilon_{22}$ , (c)  $\varepsilon_{33}$  and (d)  $\varepsilon_{12}$ .



شکل ۸- تنش برحسب زمان در آزمون فشاری با دادههای اندازه گیریشده تجربی و پیشبینی شده با مدلهای A، B و C برای (a) نمونه SE20 (b) نمونه SE40 و (c) نمونه SE60.

Fig. 8. Stress vs. time in compression test predicted by model A, B, C and experimentally measured for sample (a) SE20, (b) SE40, and (c) SE60.

گرفته شود، اثر نوع معادله گرانرو و از آن مهمتر درنظر گرفتن رفتار مکانیکی شبکه پرکننده-پرکننده نیز مطالعه شد. از میان مدلهای انتخاب شده در این پژوهش، مدلی که در آن رفتار گرانروکشسان پرکننده-پرکننده به طور جداگانه از رفتار گرانروکشسان پلیمر و پلیمر-پرکننده درنظر گرفته شده باشد، بهترین جواب از لحاظ هم خوانی با داده های تجربی می دهد. در نهایت یافته های این مطالعه نشان داد، استفاده از معادله های پیچیده غیر خطی برای جزء گران و همراه با مدلی که رفتار شبکه پرکننده-پرکننده را درنظر بگیرد، به ویژه برای آمیزه های دارای مقادیر زیاد دوده، ضرورت تام دارد.

- Yeoh O.H., Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates, *Rubber Chem. Technol.*, 63,792-805, 1990.
- Yeoh O.H., Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber, *Rubber Chem. Technol.*, 66, 754-771, 1993.
- Bergström J., Continuum Mechanics Foundations, Mechanics of Solid Polymers: Theory and Computational Modeling, Elsevier, San Diego, CA, USA, 131-207, 2015.
- Arruda E.M. and Boyce M.C., A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **41**, 389-412, 1993.
- Marlow R.S., A General First-Invariant Hyperelastic Constitutive Model, Constitutive Models for Rubber, Swets and Zeitlinger B.V., Lisse, The Netherland, 157-160, 2003.
- Ghoreishy M.H.R., An Experimental and Numerical Verification of Different Hyperelastic Material Models for Rubbers Under Tension and Compression Loads, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, 22, 273-284, 2009.
- Ghoreishy M.H.R., Determination of the Parameters of the Prony Series in Hyper-viscoelastic Material Models Using the Finite Element Method, *Mater. Des.*, 35, 791-797, 2012.
- Carroll M.M., A Strain Energy Function for Vulcanized Rubbers, J. Elast., 103,173-187, 2011.
- Melly S.K., Liu L., Liu Y., and Leng J., Improved Carroll's Hyperelastic Model Considering Compressibility and Its Finite Element Implementation, *Acta Mech. Sin.*, 37, 785-796, 2021.
- 10. Carroll M.M., Molecular Chain Networks and Strain Energy Functions in Rubber Elasticity, *Philos. Trans. Royal Soc. A*,

## نتيجه گيرى

در این پژوهش پارامترهای سه مدل ابرکشسان گرانرو همراه با نرمشدگی تنش که با آزمون کشش تعیینشده بودند، برای شبیهسازی یک قطعه زیر بار فشاری، بهکاربرده شد. نتایج نشان داد، قابلیت زیاد یک مدل در پیش بینی رفتار تنش –کرنش یا تنش –زمان در یک شیوه بارگذاری، تضمینی برای دستیابی بههمان دقت در سایر شیوههای بارگذاری نیست. اگرچه این مسئله پیش تر در کارهای سایر پژوهشگران نشان داده شده بود، اما در کار حاضر با تعمیم مطالعات به حالتی که در آن آثار گرانروکشسانی و نرمشدگی تنش درنظر

377, 1-12, 2019.

مراجع

- He H., Zhang Q., Zhang Y., Chen J., Zhang L., and Li F., A Comparative Study of 85 Hyperelastic Constitutive Models for Both Unfilled Rubber and Highly Filled Rubber Nanocomposite Material, *Nano Mater. Sci.*, 4, 64-82, 2022.
- Melly S.K., Liu L., Liu Y., and Leng J., A Review on Material Models for Isotropic Hyperelasticity, *Int. J. Mech. Syst. Dyn.*, 1, 71-88, 2021.
- Bergström J.S. and Boyce M.C., Constitutive Modeling of the Large Strain Time-Dependent Behavior of Elastomers, J. Mech. Phys. Solids, 46, 931-954, 1998.
- Bergström J.S. and Boyce M.C., Large Strain Time-Dependent Behavior of Filled Elastomers, *Mech. Mater.*, **32**, 627-644, 2000.
- Ayoub G., Zaïri F., Naït-Abdelaziz M., and Gloaguen J-M., Modeling the Low-Cycle Fatigue Behavior of Viscohyperelastic Elastomeric Materials Using a New Network Alteration Theory: Application to Styrene-Butadiene Rubber, J. Mech. Phys. Solids, 59, 473-495, 2011.
- Ayoub G., Zaïri F., Naït-Abdelaziz M., Gloaguen J.M., and Kridli G., A Visco-hyperelastic Damage Model for Cyclic Stress-Softening, Hysteresis and Permanent Set in Rubber Using the Network Alteration Theory, *Int. J. Plast.*, 54, 19-33, 2014.
- Ghoreishy M.H.R. and Abbassi-Sourki F., Development of a New Combined Numerical/Experimental Approach for the Modeling of the Nonlinear Hyper-viscoelastic Behavior of Highly Carbon Black Filled Rubber Compound, *Polym. Test.*,

70, 135-143, 2018.

 Ghoreishy M.H.R. and Abbassi-Sourki F., Study the Hyperviscoelastic and Stress Softening Behaviors of Various SBR/ CB Filled Compounds Using a Triple Model, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **33**, 339-350, 2020.

بيرحميدرضا قريش

- Ghoreishy M.H.R. and Abbassi Sourki F., Modeling the Hyperviscoelastic and Stress-Softening Behaviors of S-SBR/ CB-Filled Rubber Compound Using a Multicomponent Model, *Mech. Time-Depend Mater.*, 1-24, 2022. DOI:org/10.1007/ s11043-022-09550-3
- Samaei S., Ghoreishy M.H.R., and Naderi G., Effects of SBR Molecular Structure and Filler Type on the Hyper-viscoelastic Behavior of SBR/BR Radial Tyre Tread Compounds Using a Combined Numerical/Experimental Approach, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **32**, 65-78, 2019.
- Ghoreishy M.H.R. and Abbassi-Sourki F., Nonlinear Stress Relaxation of Filled Rubber Compounds: A New Theoretical Model and Experimental Investigation, *J. Appl. Polym. Sci.*, 138, 49884, 2021.
- 22. Ogden R.W. and Roxburgh D.G., A Pseudo-Elastic Model

for the Mullins Effect in Filled Rubber, *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **455**, 2861-2877, 1999.

- Ghoreishy M.H.R. and Abbassi-Sourki F., Development of a New Model Based on Ogden-Roxburgh Model for the Prediction of the Stress-Softening Behavior of Carbon Black-Filled Rubber Compounds, *Iran. J. Polym. Sci. Technol.* (*Persian*), 35, 69-82, 2022.
- Bergström J., Viscoplasticity Models, Mechanics of Solid Polymers: Theory and Computational Modeling, Elsevier, San Diego, CA, USA, 371-436, 2015.
- 25. Lazeration J.J., Determination of the Coefficient of Friction of Rubber at Realistic Tire Contact Pressures, *Rubber Chem. Technol.*, **60**, 966-974, 1987.
- Abaqus, Simulia Corporation, Dassault Systemes, Providence, RI, USA, 2020.
- 27. MCalibration, Veryst Engineering, Needham, MA, USA, 2020.
- 28. Rao S.S., *Engineering Optimization Theory and Practice*, 4th ed., John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2009.