Available in: http://jips.ippi.ac.ir

Iranian Journal of Polymer Science and Technology
Vol. 24, No. 5, 369-377
December 2011- January 2012
ISSN: 1016-3255

Simulating Mechanical Behavior of a Tread Rubber Compound by a Hyperelastic/Hysteresis Model

Mir Hamid Reza Ghoreishy*

Iran Polymer and Petrochemical Institute, P.O. Box: 14965-115, Tehran, Iran

Received 6 July 2011, accepted 8 October 2011

ABSTRACT

This research work is devoted to experimental and theoretical evaluations of a hybrid constitutive model which was designed to simulate the mechanical behavior of a tread rubber compound. The model is a combination of Yeoh hyperelastic model with a strain-rate hysteresis model developed by Bergstrom and Boyce. The parameters of the Yeoh model were calibrated from experimental data of the ASTM D-412 stress-strain test. Three rubber strip specimens with 11 cm length and 1, 2 and 3 cm widths were selected and simulated under tension using ABAQUS/Standard code. Comparison of the results with those obtained by experiments on the samples revealed that ignoring the viscoelasticity led to a significant error in prediction of the force-elongation behavior. Consequently, the simulations were repeated by using a hybrid model and the results showed that there were very good agreement between the experimental and simulated results. The model is also capable of calculating the dissipated energy which can be used for the prediction of temperature rise in rubber articles with dynamic loading.

Key Words:
tread compound,
hyperelastic,
viscoelasticity,
hysteresis,
finite element method

* E-mail: m.h.r.ghoreishy@ippi.ac.ir

قابل دسترس در نشانی: http://jips.ippi.ac.ir

مجله علوم و تکنولوژی پلیمر،
سال بیست و چهارم، شماره ۵،
صفحه ۳۷۷-۳۶۹، ۱۳۹۰
ISSN: 1016-3255

شبیه‌سازی رفتار مکانیکی آمیزه لاستیکی رویه تایر به کمک مدل تلفیقی ابرکشسان و پسماند انرژی

میرحمیدرضا قریشی*

تهران، پژوهشگاه پلیمر و پتروشیمی ایران، صندوق پستی ۱۱۵- ۱۴۹۶۵

دریافت: ۹۰/۴/۱۵، پذیرش: ۹۰/۷/۱۶

چکیده

در این پژوهش، عملکرد مدل تلفیقی ابرکشسان یه‌او (Yeoh) با مدل پسماند انرژی ارایه شده توسط برگشتروم و بویس در پیش‌بینی رفتار مکانیکی آمیزه لاستیکی مورد استفاده در رویه تایر باری سبک ارزیابی شد. بدین منظور، ابتدا آزمون کششی استاندارد ASTM D412 روی نمونه پخت شده از آمیزه مزبور انجام شد. سپس، داده‌های به دست آمده به کمک برازش خطی پردازش شدند و پارامترهای مدل یه‌او به دست آمدند. به دنبال آن سه نمونه لاستیک مستطیلی به طول cm ۱۱ و عرض‌های ۲،۱ و cm ۳ تهیه و تحت تغییر شکل کششی با روش اجزای محدود به کمک نرم‌افزار ABAQUS/Standard شبیه‌سازی شدند. با مقایسه نتایج به دست آمده با داده‌های تجربی حاصل از انجام آزمون کششی روی سه نمونه یاد شده مشخص شد، استفاده از مدل ابرکشسان بدون در نظر گرفتن رفتار گرانروکشسانی می‌تواند منجر به بروز خطاهای فراوان شود. در مرحله بعد، مدل ابرکشسان با مدل غیرخطی پسماند انرژی برگشتروم و بویس ترکیب و محاسبات انجام شد. مشاهده شد، در این حالت انطباق بسیار خوبی بین داده‌های تجربی و نتایج حاصل از شبیه‌سازی وجود دارد که تأییدکننده دقت و صحت محاسبات و نیز مدل یاد شده است. هم‌چنین، مدل مزبور قابلیت پیش‌بینی انرژی اتلافی در یک چرخه رفت و برگشتی بارگذاری را دارد که می‌تواند برای محاسبه افزایش دمای ایجاد شده در بارگذاری‌های پویا استفاده شود.

واژه‌های کلیدی

آمیزه رویه،
ابرکشسان،
گرانروکشسانی،
پسماند،
روش اجزای محدود

* m.h.r.ghoreishy@ippi.ac.ir

مقدمه

پیش‌بینی رفتار مکانیکی لاستیک‌های زیر بار به کمک مدل‌های ریاضی همواره مورد توجه پژوهشگران مختلف بوده است. علل اصلی این موضوع را باید در چند نکته مهم جست‌وجو کرد. اول این که لاستیک‌ها موادی با انعطاف‌پذیری بسیار زیاد و کشسانی زیاد و در عین حال تراکم‌ناپذیری بسیار ناچیز و در حد صفر هستند، به نحوی که نظریه‌های کشسان خطی به هیچ وجه درباره آنها صدق نمی‌کند. از سوی دیگر همانند سایر مواد پلیمری، گرانروکشسان هستند که این امر موجب می‌شود تا رفتار آنها به زمان و سرعت اعمال بار ـ تغییرشکل وابسته باشد. این موضوع به نوبه خود موجب می‌شود تا قابلیت اتلاف انرژی در آنها وجود داشته باشد که مهم‌ترین شاخص آن وجود پسماند در بارگذاری‌های پویا یا تناوبی است. ویژگی دیگری که بر پیچیدگی مطلب می‌افزاید، این است که لاستیک‌ها اساساً بدون وجود مواد افزودنی به ویژه پرکننده‌های تقویتی همانند دوده‌ها استفاده نمی‌شوند. بنابراین، ارایه مدلی جامع و کامل که بتواند رفتار آنها را در همه محدوده‌های تنش و کرنش (یا تغییر شکل) بیان کند، نه تنها امری دشوار و بسیار نامحتمل به نظر می‌رسد، بلکه نیازمند مدل‌های پیچیده ریاضی با پارامترها و شاخص‌های متعدد است. به همه این موارد باید دشواری به کارگیری این مدل‌ها در نرم‌افزارهای اجزای محدود را نیز افزود، چرا که بدون استفاده از تحلیل اجزای محدود عملاً این مدل‌ها قابلیت کاربرد ندارند.

بیان ریاضی رفتار مکانیکی مستقل از زمان آمیزه‌های لاستیکی به کمک مدل‌های ابرکشسان انجام می‌شود. تاکنون در این باره مدل‌های متعددی عرضه شده که می‌توان به مراجع ۵-۱ رجوع کرد. از سوی دیگر، در نظر گرفتن رفتار وابسته به زمان مستلزم اضافه کردن مدلی گرانروکشسان به مدل ابرکشسان است تا این وابستگی زمان یا سرعت اعمال کرنش در آن لحاظ شود. در این باره نیز مطالعات مختلفی انجام شده که از جمله آنها می‌توان به مراجع ۹-۶ اشاره داشت. در این مطالعات سعی شده تا یک مدل ابرکشسان کلاسیک با یک مدل گرانروکشسان تلفیق و به کمک آن رفتار لاستیک به ویژه در سرعت‌های مختلف اعمال کرنش بررسی شود. در این‌جا مهم‌ترین چالش پیش رو، غیرخطی بودن رفتار گرانروکشسانی لاستیک‌ها به ویژه لاستیک‌های پرشده با دوده یا سایر تقویت کننده‌هاست که لزوم ارایه مدلی غیرخطی را برای بیان این نوع رفتار روشن می‌سازد.

در این کار پژوهشی، یکی از مهم‌ترین این مدل‌ها که توسط برگشتروم و بویس [۱۰] ارایه شده مورد توجه واقع شده است. مدل این دو پژوهشگر بر مبنای نظریه مولکولی نوشته شده و در کارهای بعدی ایشان توسعه داده شده است [۱۱،۱۲]. ساختار مولکولی لاستیک و پرکننده در این مدل به دو بخش کشسان (که با معادلات ابرکشسان بیان می‌شود) و غیرکشسان وابسته به زمان (که با معادله‌ای نمایی داده می‌شود) تفکیک شده به نحوی که تنش ماکروسکوپی وارد شده به لاستیک حاصل جمع تنش وارد شده به هر یک از این دو بخش در نظر گرفته می‌شود. در حقیقت، این مدل که به شکل عددی در نرم‌افزار ABAQUS/Standard [۱۳] قرار دارد، می‌تواند از راه تلفیق با یکی از مدل‌های ابرکشسان رفتار وابسته به زمان لاستیک‌ها را شبیه‌سازی کند. نخستین بار این مدل، برای مطالعه رفتار لاستیک کلروپرن تقویت شده با مقادیر مختلف دوده به کار بسته شد. در این مدل، سرعت کرنش خزشی به شکل تابعی غیرخطی و نمایی از کرنش و تنش وارد شده به بخش غیرکشسان شبکه مولکولی در نظر گرفته می‌شود [۱۲-۱۰].

بر مبنای جست‌وجوی مطالعاتی انجام شده مدل غیرخطی برگشتروم و بویس نه تنها برای کائوچوی طبیعی و بوتادی‌ان و نیز آمیخته آنها بررسی نشده بلکه قابلیت کاربرد آن در پیش‌بینی رفتار صحیح لاستیک‌ها به کمک روش اجزای محدود نیز تاکنون مطالعه نشده است. بر همین اساس، این دو زمینه دست نخورده نوآوری‌های ویژه این کار را تشکیل می‌دهند. دو کائوچوی یاد شده در زمره کائوچوهای با مصرف عام و زیاد هستند که به ویژه در ساخت تایر استفاده می‌شوند. از آن جا که پیش‌بینی اتلاف انرژی در تایر به هنگام حرکت و در نتیجه محاسبه مقاومت غلتشی می‌تواند در بهینه‌سازی تایر و کاهش مصرف سوخت و انرژی نقش تعیین‌کننده‌ای ایفا کند. بنابراین، چگونگی استفاده از این معادلات در مدل اجزای محدود تایر می‌تواند گام مؤثری در پیش‌بینی مقاومت غلتشی تایر به شمار آید. البته شایان ذکر است، رفتار ابرکشسان گرانرو این آمیزه به کمک روش اجزای محدود برای مدل خطی به تازگی توسط نویسنده مقاله بررسی شده است [۱٤] که در کار فعلی به مدل غیرخطی تعمیم داده شده است.

در ادامه این مقاله، ابتدا مدل مکانیکی بیان کننده رفتار لاستیک بر مبنای تلفیق مدل ابرکشسان و مدل پسماند برگشتروم و بویس ارایه می‌شود و سپس روش تجربی اندازه‌گیری خواص لاستیک بیان شده است. به دنبال آن چگونگی تعیین پارامترهای مدل ابرکشسان استفاده شده در این پژوهش به کمک برازش داده‌های تجربی مورد توجه واقع شده است. در بخش نتایج و بحث روش ساخت مدل اجزای محدود به همراه بهینه‌سازی آن و مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی و مقادیر تجربی شرح و بسط داده شده است. هم‌چنین، روش سعی و خطای عددی به کار برده شده برای تعیین پارامترهای مدل پسماند توضیح و داده‌های به دست آمده ارایه شده است.

مدل ریاضی رفتار مکانیکی لاستیک

در پژوهش حاضر، برای بیان ریاضی رفتار مکانیکی لاستیک از تلفیق یک مدل ابرکشسان کلاسیک به نام مدل یه‌او (Yeoh) و یک مدل مکانیکی پسماند استفاده شده است. در این مدل تلفیقی فرض می‌شود، لاستیک‌ها رفتار گرانروکشسان غیرخطی دارند، به نحوی که در یک فرایند بارگذاری تناوبی بخشی از انرژی ذخیره شده خود را به گرما تبدیل می‌کنند. هم‌چنین، رفتار آنها وابسته به سرعت کرنش اعمالی است. این مدل توسط دو پژوهشگر به نام‌های برگشتروم و بویس [۱۰] برای مواد الاستومری ارایه شد که سنجش عملکرد آن در پیش‌بینی رفتار مکانیکی لاستیک‌ها از راه مقایسه با داده‌های تجربی برای اولین بار در این کار پژوهشی انجام شده است. نظریه مدل مزبور بر این پایه قرار گرفته که پلیمرهای تشکیل‌دهنده به همراه سایر مولکول‌های موجود نظیر پرکننده‌ها و سایر اجزای آمیزه را می‌توان به دو شبکه مولکولی A و B دسته‌بندی کرد، به طوری که تنش وارد شده به لاستیک جمع تنش‌هایی است که به هریک از این دو وارد می‌شود.

شبکه مولکولی A رفتار ابرکشسان یا مستقل از زمان پلیمر را بیان می‌کند و برای بیان ریاضی آن از همان معادلات کلاسیک ابرکشسانی همانند مونی ـ ریولین(Mooney-Rivlin)، اگدن (Ogden)، یه‌او و مارلو (Marlow) استفاده می‌شود [٤]. در این باره مرجع ۱ می‌تواند برای مطالعه بیشتر مورد ارجاع واقع شود.

در این کار همان طورکه قبلاً نیز اشاره شد، از مدل یه‌او استفاده شد. علت انتخاب این مدل به مطالعات پیشین بر می‌گردد [۱]. در آن جا نشان داده شده بود که مدل مارلو نتایج بسیار قابل قبولی را در محاسبات اجزای محدود لاستیک‌ها نشان می‌دهد. در این مدل فرض شده که تابع چگالی انرژی کرنشی تنها به ناوردای اول (first invariant) تانسور کرنش (I_1) وابسته است که بدون ارایه معادله‌ای خاص و تنها با استفاده مستقیم از داده‌های آزمون کششی می‌توان از آن در محاسبات استفاده کرد. اما، به دلایل محاسباتی و عددی که ذکر آنها خارج از بحث این مقاله است، نمی‌توان آن را با مدل پسماند تلفیق کرد که در ادامه به آن اشاره می‌شود. بنابراین، از مدلی استفاده شد که معادله ریاضی تابع چگالی انرژی کرنشی را تنها به ناوردای اول مرتبط می‌سازد. این مدل‌ها به نام مدل‌های چندجمله‌ای کاهش یافته [۱] خوانده می‌شود. از مهم‌ترین این مدل‌ها می‌توان به مدل یه‌او اشاره کرد که با معادله (۱) داده شده است:

$$W=C_1(I_1-3)+C_2(I_1-3)^2+C_3(I_1-3)^2 \qquad (۱)$$

که W تابع چگالی انرژی کرنشی و C_1، C_2 و C_3 ثابت‌های معادله‌اند که به کمک برازش معین می‌شوند.

از سوی دیگر، در شبکه مولکولی B رفتار غیرکشسان ساختار پلیمر و مواد افزودنی مورد توجه قرار گرفته و وابستگی رفتار به زمان و سرعت اعمال بار را نشان می‌دهد. بیان ریاضی رفتار مکانیکی این شبکه با معادله‌ای انجام می‌شود که سرعت کرنش خزشی ($\dot{\varepsilon}_B$) به تنش اعمالی بر این ناحیه را به شکل معادله (۲) مرتبط می‌سازد:

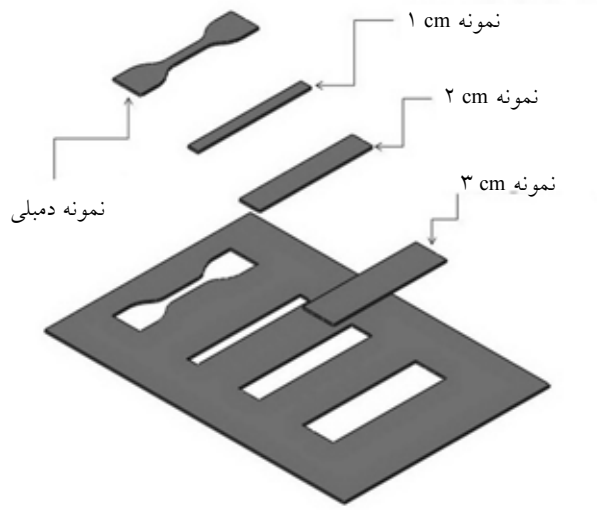
$$\dot{\varepsilon}_B=A[\lambda_B-1]^c\,(\sigma_B)^m \qquad (۲)$$

در این معادله A پارامتری ثابت، σ_B تنش اعمال شده به شبکه c و B مقداری ثابت در محدوده ۰ و ۱– است و مقدار وابستگی کرنش را به سرعت کرنش خزشی نشان می‌دهد. m شاخص نمایی که معمولاً بزرگ‌تر از ۱ است و نشان‌دهنده مقدار وابستگی سرعت کرنش خزشی به تنش است. هم‌چنین، λ_B-1 کرنش خزشی اسمی است. برای بیان کامل رفتار مکانیکی لاستیک‌ها به کمک این مدل لازم است تا سه پارامتر معادله (۲) یعنی m، c و A به همراه پارامتر دیگری که با S نشان داده شده و مبین نسبت تنش اعمال شده به وسیله شبکه B به تنش اعمالی به شبکه A (شبکه کشسان) است، مشخص شوند. چگونگی تعیین این پارامترها در بخش نتایج و بحث شرح داده شده است.

تجربی

مواد و دستگاه

از آمیزه‌ای لاستیکی که آمیخته‌ای از کائوچوی طبیعی (NR) و بوتادی‌ان (BR) تقویت‌شده با دوده است، استفاده شد. این آمیزه برای ساخت رویه تایر باری سبک به کار برده شده که نمونه مورد نیاز در این پژوهش از خط تولید آن برداشت شد. صفحه‌ای لاستیکی با ضخامت تقریبی ۲ mm که به طور معمول برای تهیه نمونه‌های کششی استفاده می‌شود، تهیه و به وسیله پرس فشاری و در قالب پخت شد. سپس، از روی این صفحه لاستیکی نمونه دمبلی شکل مختص آزمون کششی مطابق استاندارد ASTM D412 و سه نوار لاستیکی با طول ۱۱ cm و عرض‌های ۱، ۲ و ۳ cm تهیه شد (شکل ۱). هر یک از این چهار نمونه یاد شده به طور جداگانه بین دو فک یک دستگاه کشش هیوا قرار داده شده و با سرعت ۵۰۰ mm/min کشیده شدند. یادآور می‌شود، هر آزمون حداقل پنج مرتبه برای هر یک از



شکل ۱- صفحه لاستیکی پخت شده همراه با نمونه‌های تهیه شده از آن.

این نمونه‌ها انجام و از متوسط نتایج به دست آمده استفاده شد. این نتایج شامل ازدیاد طول لاستیک و نیروی ثبت شده بر حسب زمان بود. هم‌چنین شایان ذکر است، برای سنجش قابلیت دربرگیرندگی روش ارایه شده در این کار از سه نمونه در ابعاد ۱، ۲ و ۳ cm استفاده شد. بدین ترتیب که نتایج حاصل از محاسبات با نمونه ۱ cm برای دو نمونه دیگر (۲ و ۳ cm) استفاده و نشان داده شد که این قابلیت برقرار است.

پارامترهای مدل ابرکشسان

در نخستین مرحله، داده‌های حاصل از انجام آزمون کشش برای تعیین پارامترهای مدل ابرکشسان به کار گرفته شد. در این پژوهش از مدل یه‌او استفاده شد. به همین دلیل، ابتدا مدل داده شده به کمک معادله (۱) برای حالت خاص کشش یک بعدی (آزمون کشش روی نمونه دمبلی شکل) بازآرایی شد. برای این منظور مقدار ناوردای اول یعنی I_1 در حالت کشش یک بعدی به شکل معادله (۳) نوشته می‌شود [۱]:

$$I_1=\lambda^2+2/\lambda \qquad (۳)$$

که در آن λ نسبت کشیدگی است و در این حالت برابراست با:

$$\lambda=1+\varepsilon \qquad (٤)$$

ε کرنش اسمی است. با قرار دادن معادله (۳) در معادله (۱) تابع چگالی انرژی کرنشی یه‌او برای حالت کشش یک بعدی به شکل معادله (۵) به دست می‌آید:

$$W= C_1(\lambda^2+2/\lambda-3)+C_2(\lambda^2+2/\lambda-3)^2+C_3(\lambda^2+2/\lambda-3)^3 \qquad (۵)$$

با توجه به این که مقدار نیرو از مشتق تابع انرژی نسبت به طول به‌دست می‌آید، هم‌چنین یادآوری این نکته که $\lambda=l/l_0$ است می‌توان نوشت:

$$F=V\,dW/dl=V\,dW/d\lambda\;d\lambda/dl=(V/l_0)\,dW/d\lambda \qquad (٦)$$

که در آن V حجم نمونه است. از آن جا که $A_0=V/l_0$ است، بنابراین مقدار تنش اسمی σ_n (نیرو تقسیم بر سطح مقطع اولیه نمونه یا F/A_0) به شکل معادله (۷) حاصل می‌شود:

$$\sigma_n=dW/d\lambda \qquad (۷)$$

بر این اساس با محاسبه مشتق W بر حسب λ از معادله (۵) رابطه بین تنش اسمی و نسبت کشیدگی در مدل یه‌او به شکل معادله (۸) حاصل می‌شود:

$$\sigma_n=C_1(2\lambda-2/\lambda)+2C_2(2\lambda-2/\lambda)(\lambda^2+2/\lambda-3)+3C_3(2\lambda-2/\lambda)(\lambda^2+2/\lambda-3)^2 \qquad (۸)$$

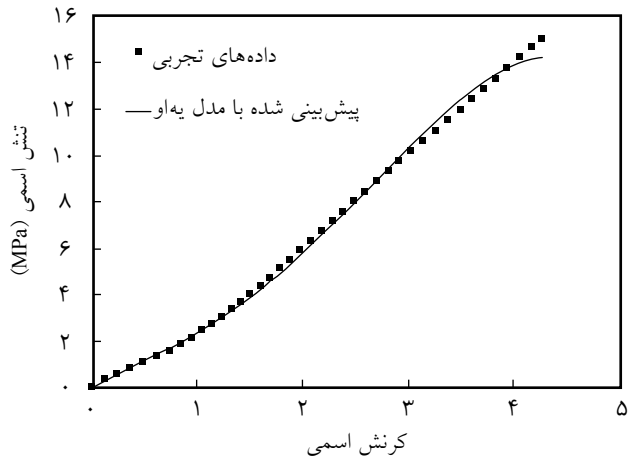
حال با تبدیل کرنش اندازه‌گیری شده از معادله (٤) به نسبت کشیدگی (λ)، در دست داشتن تنش اسمی و استفاده از یک برازش خطی به آسانی پارامترهای معادله یه‌او به دست می‌آیند که نمودار برازش شده و مقادیر عددی آنها به ترتیب در شکل ۲ و جدول ۱ داده شده‌اند.

نتایج و بحث

مدل مکانیکی تلفیقی مورد بررسی در نرم‌افزار ABASQUS/Standard قرار داده شده که از آن می‌توان برای شبیه‌سازی قطعات لاستیکی زیر بارهای مکانیکی استفاده کرد. سه مدل اجزای محدود برای نمونه‌های ۱، ۲ و ۳ cm نشان داده شده در شکل ۱ ساخته شد. برای این منظور، ابتدا شکل هندسی این نمونه‌ها به کمک نرم‌افزار ABAQUS/CAE

جدول ۱- پارامترهای برازش شده مدل یه‌او نشان داده شده در شکل ۲.

پارامتر مدل	C_1	C_2	C_3
مقدار (SI)	۰/۵۰٦	۰/۰٤٤٨٤٨	-۰/۰۰۰۷۳۸

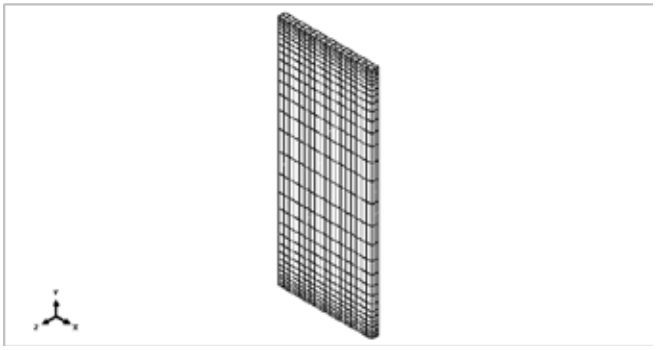


شکل ۲- نمودار تنش اسمی بر حسب کرنش اسمی نمونه دمبلی به دست آمده از آزمون کششی در دوحالت تجربی و پیش‌بینی شده با مدل یه‌او.

ساخته و سپس شبکه اجزای محدود آنها ایجاد شد. این سه شبکه به ترتیب در شکل‌های ۳ تا ۵ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، از اجزای‌های سه‌بعدی ۲۰-گره‌ای هیبریدی با قابلیت درنظر

شکل ۳- شبکه اجزای محدود نمونه cm ۱ ساخته شده از اجزای شش‌وجهی ۲۰-گره‌ای هیبریدی.

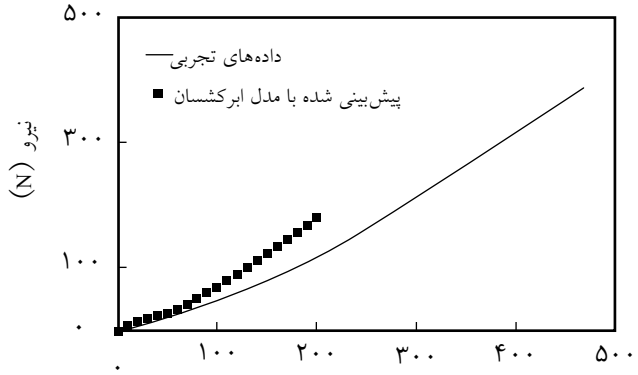
شکل ٤- شبکه اجزای محدود نمونه cm ۲ ساخته شده از اجزای شش‌وجهی ۲۰-گره‌ای هیبریدی.



شکل ۵- شبکه اجزای محدود نمونه cm ۳ ساخته شده از اجزای شش‌وجهی ۲۰-گره‌ای هیبریدی.

گرفتن تراکم‌ناپذیری لاستیک استفاده شد. به منظور بهینه‌سازی این شبکه‌ها و حصول اطمینان از دقت و عملکرد صحیح شبکه‌های مزبور از روش شبکه‌بندی انطباقی (adaptive meshing) استفاده شد. از این روش قبلاً نیز [۱] به خوبی برای بهینه کردن شبکه اجزای محدود در محاسبات مهندسی لاستیک استفاده شده بود. به طور خلاصه، در این روش ابتدا یک شبکه اجزای محدود با اجزای چهاروجهی ساخته شده و سپس نرم‌افزار به طور خودکار شبکه را تغییر می‌دهد تا جایی که مقدار خطا بر پایه شاخص تنش معادل von Mises به زیر ۱ درصد برسد. به دنبال آن یک شبکه اجزای محدود شش‌وجهی متشکل از اجزای ۲۰-گره‌ای متناظر با شبکه بهینه شده با اجزای چهاروجهی ساخته می‌شود به نحوی که توزیع تنش von Mises در هردو جزء یکسان باشند. بدین ترتیب می‌توان اطمینان داشت، شبکه اجزای محدود شش‌وجهی مناسب تهیه شده است که قابلیت محاسباتی بیشتر نسبت به شبکه با اجزای چهاروجهی دارد. شکل ٦ شبکه اجزای محدود بهینه‌شده با اجزای چهاروجهی برای نمونه cm ۱ را نشان می‌دهد که شبکه شش‌وجهی متناظر آن در شکل ۲ نشان داده شده است. هر سه مدل اجزای محدود در یک مقدار معین تغییر شکل در جهت طولی قرار گرفتند. بدین ترتیب که یک طرف آنها ثابت و

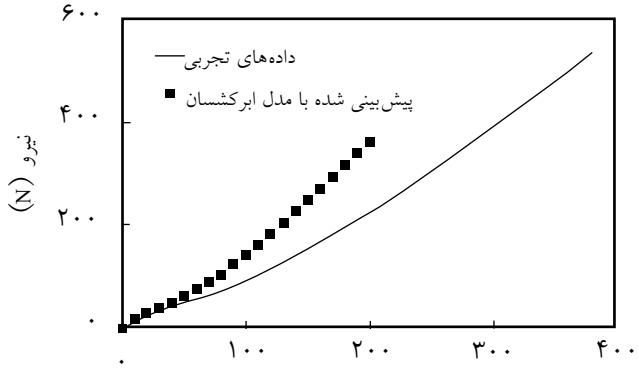
شکل ٦- شبکه اجزای محدود چهاروجهی نمونه cm ۱ بهینه شده با استفاده از روش شبکه‌بندی انطباقی.



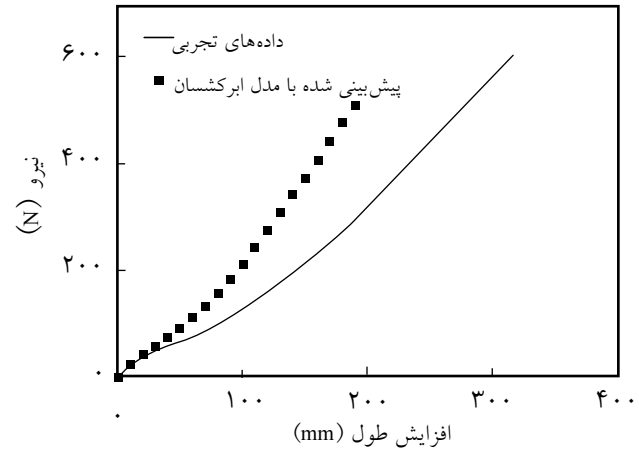
شکل ۷- نمودار تغییرات نیرو بر حسب افزایش طول در نمونه ۱ cm در دوحالت تجربی و پیش‌بینی شده با مدل ابرکشسان.

طرف دیگر به مقدار ۲۰۰ mm کشیده شد. فرایند تحلیل اجزای محدود به کمک نرم‌افزار ABAQUS/Standard نسخه 6.10 [۱۳] و به شکل غیرخطی انجام شد. دو مجموعه از این تحلیل‌ها انجام شد. در مجموعه اول فرض شد که رفتار لاستیک تنها از مدل ابرکشسان یه‌او (معادله ۱) پیروی می‌کند. بر این اساس نمودار تغییرات نیرو بر حسب ازدیاد طول محاسبه شده به همراه داده‌های تجربی برای نمونه‌های ۱، ۲ و ۳ cm در شکل‌های۷ تا ۹ نشان داده شده‌اند.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، اختلاف قابل ملاحظه‌ای بین داده‌های تجربی و محاسباتی به ویژه در مقادیر زیاد ازدیاد طول وجود دارد که علت اصلی این اختلاف درنظر نگرفتن پدیده گرانروکشسانی است. به عبارت بهتر، خاصیت گرانروکشسانی لاستیک موجب بروز آسودگی تنش حین کشش شده که خود باعث کاهش نیروی لازم برای کشیدن می‌شود. این مسئله به خوبی از بالاتر بودن نمودار به دست آمده از محاسبات نسبت به داده‌های تجربی قابل مشاهده است. برای رفع این نقیصه مدل ابرکشسان یه‌او با مدل پسماند بیان شده به کمک معادله (۲) تلفیق و محاسبات تکرار شد. برای این کار لازم بود، ابتدا



شکل ۸- نمودار تغییرات نیرو بر حسب افزایش طول در نمونه ۲ cm در دوحالت تجربی و پیش‌بینی شده با مدل ابرکشسان.

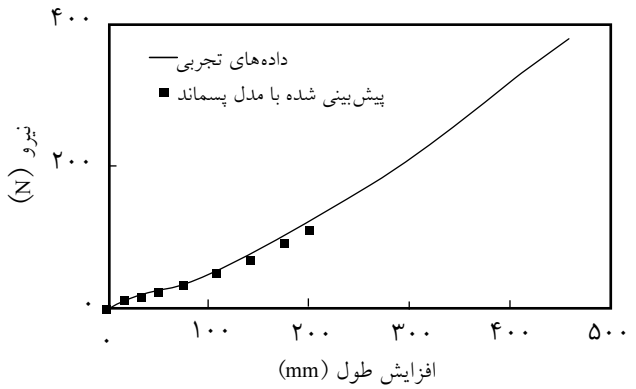


شکل ۹- نمودار تغییرات نیرو بر حسب افزایش طول در نمونه ۳ cm در دوحالت تجربی و پیش‌بینی شده با مدل ابرکشسان.

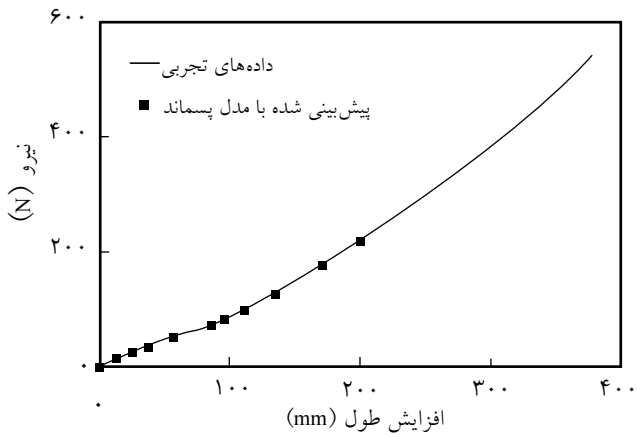
سه پارامتر معادله پسماند (۲) یعنی m، c و A به همراه پارامتر S معین شوند. برای نیل به این هدف مجموعه مطالعه پارامتری انجام شد. در این مطالعات مقادیر چهار پارامتر یاد شده بین دو مقدار کمینه و

جدول ۲ – داده‌های نیروی محاسبه شده در ۲۰۰ mm کشش برای نمونه ۱ cm در مقادیر مختلف S و m.

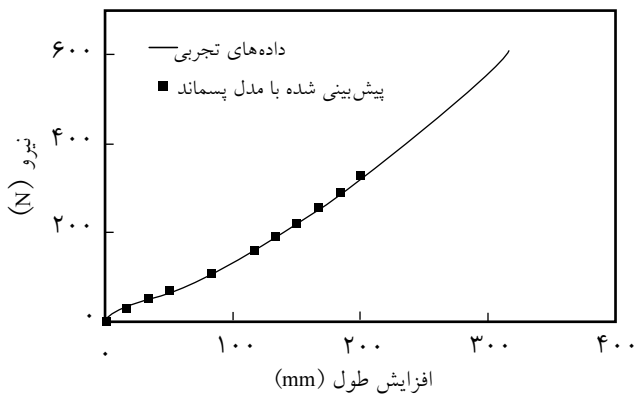
پارامتر S	پارامتر m						اختلاف بیشینه و کمینه نیرو
	٤	٤/٢	٤/٤	٤/٦	٤/٨	٥	
٠/٥	١٢٣/٨٥	١٢٤	١٢٤/١٤	١٢٤/٢١٦	١٢٤/٤٣	١٢٤/٥٤	٠/٦٨
٠/٦	١١٦/٣٣	١١٦/٤٦	١١٦/٦٢	١١٦/٧٣	١١٦/٩	١١٧/٠٣	٠/٧٠
٠/٧	١٠٩/٦٨	١٠٩/٨١	١٠٩/٩٥	١١٠/١١	١١٠/٢٥	١١٠/٣٨	٠/٧٠
٠/٨	١٠٣/٧٤	١٠٣/٩١	١٠٤/٠٦	١٠٤/٢	١٠٤/٣١	١٠٤/٤٧	٠/٧٣
٠/٩	٩٨/٤٦٤	٩٨/٦١٧	٩٨/٧٣	٩٨/٩٠٥	٩٩/٠٤٢	٩٩/١٥١	٠/٦٩
١/٠	٩٣/٦٩٦	٩٣/٨٤٩	٩٣/٩٩٧	٩٤/١١٦	٩٤/٢٧٦	٩٤/٤٠٨	٠/٧١



شکل ۱۰ – نمودار تغییرات نیرو بر حسب افزایش طول در نمونه ۱ cm در دوحالت تجربی و پیش‌بینی شده با مدل تلفیقی ابرکشسان یه‌او و پسماند برگشتروم و بویس.



شکل ۱۱– نمودار تغییرات نیرو بر حسب افزایش طول در نمونه ۲ cm در دوحالت تجربی و پیش‌بینی شده با مدل تلفیقی ابرکشسان یه‌او و پسماند برگشتروم و بویس.



شکل ۱۲– نمودار تغییرات نیرو بر حسب افزایش طول در نمونه ۳ cm در دوحالت تجربی و پیش‌بینی شده با مدل تلفیقی ابرکشسان یه‌او و پسماند برگشتروم و بویس.

جدول ۳ – پارامترهای استفاده شده برای مدل پسماند (۲).

پارامتر مدل پسماند	S	A	m	c
مقدار (SI)	۰/۷	$5/(\sqrt{3})^m$	٤	−۱

بیشینه بر اساس داده‌های پیشنهاد شده در مراجع [۱۰،۱۱] تغییر و تحلیل‌های اجزای محدود روی نمونه ۱ cm انجام شد. بر اساس نتایج به دست آمده، از این تحلیل‌ها داده‌های مربوط به نیرو برای رسیدن به کشش ۲۰۰ mm برحسب مقادیر مختلف S و m در جدول ۲ آورده شده‌اند. مشاهده می‌شود، اثر غالب در این جا مربوط به متغیر S است که نسبت بین تنش تحمل شده به وسیله شبکه گرانرو به شبکه کشسان است. پارامتر m اثر ناچیزی روی جواب‌ها دارد. این نکته را به راحتی می‌توان از روی اختلاف بین مقادیر بیشینه و کمینه نیروها در S ثابت (ستون آخر در جدول ۲) ملاحظه کرد. بر این مبنا داده‌های مورد استفاده در این تحلیل برای نمونه‌های یاد شده انتخاب و در جدول ۳ آورده شده‌اند. نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود سه مدل پیش‌تر گفته شده با مدل تلفیقی ابرکشسان و پسماند در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود، با در نظر گرفتن اثر گرانروکشسانی می‌توان رفتار مکانیکی را با دقت بسیار زیاد پیش‌بینی کرد. از آن جا که پارامترهای داده شده در جدول ۲ بر مبنای کمینه کردن خطاها در نمونه ۱ cm ایجاد شده برای نمونه‌های ۲ و ۳ cm نیز به همان خوبی جواب داده‌اند، می‌توان چنین نتیجه گرفت که این پارامترها قابلیت دربرگیرندگی داشته و وابسته به ابعاد نیستند که این امر صحت نتایج حاصل را به اثبات می‌رساند.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با تلفیق مدل ابرکشسان یه‌او و یک مدل پسماند رفتار کششی آمیزه لاستیکی به روش اجزای محدود شبیه‌سازی شد. نشان داده شد، صرف نظر کردن از رفتار گرانروکشسان لاستیک می‌تواند منجر به بروز خطاهای زیاد در پیش‌بینی رفتار مکانیکی این مواد شود. برای رفع این نقیصه مدل برگشتروم و بویس به کار گرفته و مشاهده شد که با انتخاب صحیح پارامترهای این مدل می‌توان رفتار مکانیکی را به خوبی پیش‌بینی کرد. هم‌چنین، به کمک این مدل مقدار انرژی اتلافی در یک چرخه رفت و برگشتی محاسبه که از آن می‌توان افزایش دما در یک قطعه لاستیکی زیر بارهای پویا را معین کرد.

مراجع

1. Ghoreishy M.H.R., An Experimental and Numerical Verification of Different Hyperelastic Material Models for Rubbers under Tension and Compression Loads, *Iran. J. Polym. Sci. Technol.(In Persian),* **23**, 273-284, 2009.
2. Muhr A.H., Modeling the Stress-Strain Behavior of Rubber, *Rubber Chem. Technol*., **78**, 391-425, 2005.
3. Horgan C.O. and Saccomandi G., Phenomenological Hyperelastic Strain-Stiffening Constitutive Models for Rubber, *Rubber Chem. Technol*., **79**, 152-169, 2006.
4. Marlow R.S., *A General First-Invariant Hyperelastic Constitutive Model*, Busfield J.J.C. and Muhr A.H. (Eds.), Constitutive Models for Rubber III, Lisse, Swets and Zeitlinger, 157-160, 2003.
5. Beda T., Modeling Hyperelastic Behavior of Rubber: A Novel Invariant-based and a Review of Constitutive Models, *J. Polym. Sci., Part B: Polym. Phys*., **45**, 1713-1732, 2007.
6. Vandenbroucke A., Laurent H., Ait Hocine N., and Rio C., A Hyperelasto-Visco-Hysteresis Model for an Elastomeric Behaviour: Experimental and Numerical Investigations, *Compos. Mater. Sci*., **48**, 495-503, 2010.
7. Gracia L.A., Liarte E., Pelegay J.L., and Calvo B., Finite Element Simulation of the Hysteretic Behaviour of an Industrial Rubber. Application to Design of Rubber Components, *Finite Elem. Anal. Des*., **46**, 357-368, 2010.
8. Ghoreishy M.H.R., Hyperelastic Constitutive Models Using FEA of Rubbers: A Study, *Tire Technol. Int.* (Annual Rview), 32-34, 2010.
9. Shim V.P.W., Yang L.M., Lim C.T., and Law P.H., A Visco-Hyperelastic Constitutive Model to Characterize Both Tensile and Compressive Behavior of Rubber, *J. Appl. Polym. Sci*., **92**, 523-531, 2004.
10. Bergström J.S. and Boyce M.C., Constitutive Modeling of the Large Strain Time-Dependent Behavior of Elastomers, *J. Mech. Phys. Solid.*, **46**, 931-954, 1998.
11. Bergström J.S. and Boyce M.C., Large Strain Time-Dependent Behavior of Filled Elastomers, *Mech. Mater*., **32**, 627-644, 2000.
12. Bergström J.S. and Boyce M.C., Constitutive Modeling of the Time-Dependent and Cyclic Loading of Elastomers and Application to Soft Biological Tissues, *Mech. Mater*., **33**, 523-530, 2000.
13. ABAQUS, Version 6.10, 2010.
14. Ghoreishy M.H.R., Determination of the Parameters of the Prony Series in Hyper-viscoelastic Material Models Using the Finite Element Method, *J. Mater. Desi.,* In Press, DOI. org/10.1016/j. matdes. 2011. 05. 057.