

## A Novel Procedure for Prediction of Mixed Mode I/II in Fracture Toughness of Laminate Composites

Mahmood Mehrdad Shokrieh\* and Afshin Zeinedini

Composites Research Laboratory, Center of Excellence in Experimental Solid Mechanics and Dynamics, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, P.O. Box: 16846-13114, Tehran, Iran

Received 8 June 2013, accepted 18 January 2013

### ABSTRACT

Delamination is one of the important modes of failure in laminated composite materials. In this respect, the mixed mode I/II fracture is the most major mode of delamination incidence in laminated composite. In the present research, a relation between the fracture toughness of double cantilever beam (DCB) and asymmetric double cantilever beam (ADCB) specimens is presented. The DCB and ADCB samples are used for measuring the mode I and mixed mode I/II fracture toughness ( $G$ ) of laminated composite materials, respectively. By considering the diversity of the stacking sequence of lay-ups, the test performance on all different types of lay-ups in order to measure the fracture toughness of laminated composites is a tedious, costly and time consuming task. The purpose of deriving this relation is to estimate the value of the strain energy release rate of laminated composite ADCB specimens by testing a unidirectional DCB. To develop this relationship, the geometry of DCB and ADCB specimens are considered to obtain fracture toughness of multi-directional laminate composites of ADCB samples with arbitrary ply sequence which may be used for design purposes. The procedure presented here reduces the calculation costs of the finite element modeling and its corresponding test significantly. The results obtained by this method are compared with those of experimental and numerical methods. It is shown that the fracture toughness of multi-directional layups can be predicted by measuring the unidirectional ply with an error less than 10% demonstrating the accuracy of the procedure developed in the present research.

#### Keywords:

composite,  
fracture,  
delamination,  
mixed mode,  
toughness

(\*)To whom correspondence should be addressed.  
E-mail: [shokrieh@iust.ac.ir](mailto:shokrieh@iust.ac.ir)

# روش جدید برای پیش‌بینی شیوه ترکیبی اول و دوم چقرمگی شکست در کامپوزیت‌های لایه‌ای

محمود مهرداد شکریه\*، افشین زین‌الدینی

تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، قطب علمی مکانیک جامدات تجربی و دینامیک، آزمایشگاه تحقیقاتی کامپوزیت، صندوق پستی ۱۳۱۱۴-۱۶۸۴۶

دریافت: ۹۲/۳/۱۸، پذیرش: ۹۲/۱۰/۲۸

مجله علوم و تکنولوژی پلیمر،  
سال بیست و هفتم، شماره ۲،  
صفحه ۱۲۰-۱۱۱، ۱۳۹۳  
ISSN: 1016-3255  
Online ISSN: 2008-0883

## چکیده

شیوه ترکیبی اول و دوم شکست از عمده‌ترین شیوه‌های جدایش لایه‌ها در کامپوزیت‌های لایه‌ای است. سرعت رهایی انرژی کرنشی بحرانی به‌عنوان معیاری برای پیش‌بینی شروع جدایش لایه‌های نمونه‌ها به‌کار می‌رود. در این پژوهش، رابطه‌ای بین چقرمگی شکست تیرهای یک‌سرگردار دولبه (DCB) و یک‌سرگردار دولبه نامتقارن (ADCB) ارائه شده است. قطعات DCB و ADCB به ترتیب برای ایجاد شیوه اول و شیوه ترکیبی اول و دوم چقرمگی شکست نمونه‌های کامپوزیتی به‌کار برده می‌شوند. با توجه به تنوع چیدمان لایه‌ها، انجام آزمون روی قطعات چندلایه کامپوزیتی برای اندازه‌گیری چقرمگی شکست آنها کاری دشوار، پرهزینه و زمان‌بر است. هدف از ایجاد چنین رابطه‌ای این است که بتوان با آن مقدار سرعت رهایی انرژی کرنشی نمونه‌های کامپوزیت‌های لایه‌ای ADCB را با استفاده از آزمون نمونه تک‌جهتی DCB محاسبه کرد. بنابراین، با استفاده از چنین رابطه‌ای نیاز به آزمون نمونه‌های کامپوزیت‌های لایه‌ای ADCB مرتفع می‌شود. برای ایجاد این رابطه از هندسه نمونه‌های DCB و ADCB استفاده شد. به‌دست‌آوردن مقدار سرعت رهایی انرژی کرنشی بحرانی برای چندلایه‌های کامپوزیتی ADCB با زاویه‌های مختلف لایه‌های اطراف ترک برای استفاده در طراحی از کاربردهای مدل ارائه شده در پژوهش حاضر است. این روش، حجم محاسبات عددی و نیز هزینه مطالعات آزمایشگاهی را کاهش می‌دهد. نتایج به‌دست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش با نتایج تجربی و مدل‌سازی عددی مقایسه شد. نتایج نشان می‌دهد، با خطای کمتر از ۱۰٪، می‌توان سرعت رهایی انرژی کرنشی نمونه‌های ADCB را با استفاده از مقدار سرعت رهایی انرژی کرنشی نمونه‌های تک‌جهتی DCB (به‌دست آمده از راه آزمون) پیش‌بینی کرد. نتایج به‌دست آمده از مقایسه نمایانگر دقت مطلوب روش ارائه شده در این پژوهش است.

## واژه‌های کلیدی

کامپوزیت،  
شکست،  
جدایش لایه‌ها،  
شیوه ترکیبی،  
چقرمگی

## مقدمه

از مهم‌ترین سازوکارهایی که باعث تخریب مواد کامپوزیتی می‌شود، جدایش لایه‌هاست. جدایش لایه‌ها پدیده‌ای است که باعث گسیختگی بین ماتریس و تقویت‌کننده‌های کامپوزیت می‌شود. دلیل رخ دادن جدایش لایه‌ها، نبود تقویت‌کننده در راستای ضخامت است. عوامل ایجادکننده تورق عبارت‌اند از:

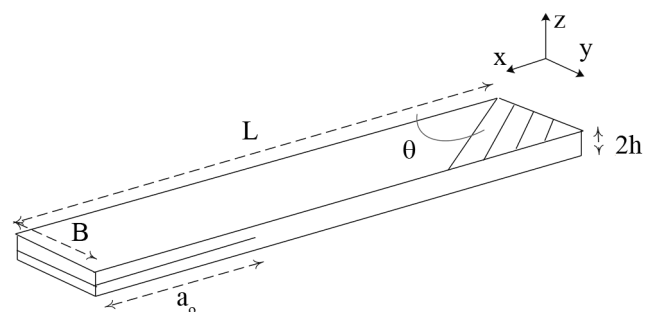
- لبه آزاد،

- ناپیوستگی‌های موجود در سازه و

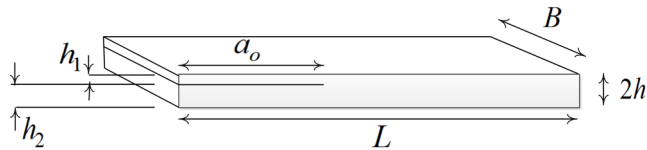
- عیوب موضعی به وجود آمده در فرایند تولید یا شرایط کارکرد مانند سوراخ کاری، ضربه و تغییرات دما و رطوبت.

درک مفهوم جدایش لایه‌ها از شکست‌های فاجعه‌بار ممانعت می‌کند. گسترش ترک‌های بین‌لایه‌ای می‌تواند با سه شیوه شکست یا ترکیبی از آنها به وجود آید. مؤلفه‌ای که رشد ترک را پیش‌بینی می‌کند، سرعت رهایی انرژی کرنشی نامیده می‌شود. اگر این سرعت برابر مقداری بحرانی شود، آنگاه ترک رشد می‌کند و تخریب به وجود می‌آید. از آنجا که اصلی‌ترین شکل تخریب کامپوزیت‌های لایه‌ای، شکست بین‌لایه‌ای، جدایش لایه‌ها، به‌ویژه تحت بارگذاری شیوه اول و نیز شیوه ترکیبی اول و دوم است، بررسی رفتار و عملکرد کامپوزیت‌های لایه‌ای در این حالت‌ها مورد توجه زیادی قرار گرفته است.

از اهداف اصلی مطالعه جدایش لایه‌ها، ارزیابی استحکام کامپوزیت لایه‌ای در برابر جدایش لایه‌هاست. آزمون نمونه تیر یک‌سرگیردار دو لبه (double cantilever beam, DCB) که در شکل ۱ نشان داده شده است، مرسوم‌ترین روش برای مطالعه جدایش لایه‌ها شیوه I بوده و تنها آزمونی که برای مطالعه جدایش لایه‌ها در کامپوزیت‌های لایه‌ای استاندارد شده، ASTM D 5528 است [۱]. سادگی و خاصیت شیوه I بودن آزمون نمونه DCB، آن را به‌طور طبیعی به‌عنوان اولین گزینه برای مطالعه جدایش لایه‌ها شیوه I در کامپوزیت‌های لایه‌ای مطرح می‌کند. در دهه ۱۹۸۰ تعدادی از پژوهشگران از نمونه DCB برای بررسی تخریب بین‌لایه‌ای در کامپوزیت‌های با الیاف پیوسته استفاده کردند.



شکل ۱- طرح کلی نمونه DCB.



شکل ۲- طرح کلی نمونه ADCB.

تیر یک‌سرگیردار دولبه نامتقارن (asymmetric double cantilever beam, ADCB) از قطعات پیشنهاد شده برای ایجاد و مشاهده شیوه ترکیبی اول و دوم است. ADCB در واقع یک نمونه DCB است که بازوهای آن از مواد مختلفی ساخته شده‌اند، ضخامت دو بازوی آن یکسان نیستند، یا ترکیبی از این دو حالت برای آن اتفاق می‌افتد. در این بخش، منظور از قطعه ADCB نمونه DCB است که بازوهای آن ضخامت یکسان ندارند، یا به عبارتی تعداد لایه‌های دو بازو یکسان نیستند (شکل ۲). در مطالعه جدایش لایه‌ها شیوه ترکیبی اول و دوم و به‌دست آوردن چقرمگی شکست کامپوزیت‌های لایه‌ای، از نمونه‌های ADCB، شیوه ترکیبی (MMB)، شیوه ترکیبی نامتقارن خمشی (AMMF) و آکان [۲] استفاده می‌شود. برای انجام آزمون نمونه‌های MMB، آکان و AMMF تجهیزات آزمایشگاهی خاصی نیاز است، اما آزمون نمونه ADCB مشابه آزمون نمونه DCB بوده که به راحتی انجام‌شدنی است. در نمونه ADCB پیشنهاد شده توسط Chan و Bradley بارهای متفاوتی (از نظر اندازه) به بازوهای این نمونه وارد شده است. Tay [۳] طی مقاله‌ای مروری، تمام مطالعات انجام شده در سال‌های ۱۹۹۰ تا ۲۰۰۱ را روی شیوه اول و دوم ترکیبی جدایش لایه‌ها با استفاده از قطعات ADCB ارائه کرد. Tong و همکاران [۴] نمونه ADCB را برای محاسبه سرعت رهایی انرژی کرنشی جدایش لایه‌های موجود در قطعات متصل شده با چسب، استفاده کردند.

سرعت رهایی انرژی کرنشی، SERR، که بیانگر انرژی آزاد شده بر واحد سطح ناشی از رشد ترک است، در بررسی و پیش‌بینی شروع جدایش لایه‌ها نقش اصلی را دارد. به بیان دیگر، اگر در نقطه‌ای از پیشانی جدایش لایه‌ها سرعت رهایی انرژی کرنشی،  $G$ ، به مقدار بحرانی یعنی چقرمگی شکست،  $G_c$ ، برسد، شروع جدایش لایه‌ها در آن نقطه اتفاق می‌افتد. از این‌رو، سرعت رهایی انرژی کرنشی کامپوزیت‌های لایه‌ای در مطالعه و مقایسه رفتار نمونه‌های DCB و ADCB در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است.

با توجه به تنوع و گستردگی چیدمان لایه‌ها در کامپوزیت‌های لایه‌ای و هزینه زیاد آزمون خواص هر چیدمان، به ارائه روش‌های کارآمدتر برای تخمین خواص چیدمان لایه‌ها نیاز است. در این پژوهش سعی شده است تا سرعت رهایی انرژی کرنشی قطعه، بدون

گرفته می‌شود. در این تخمین طول ترک مطابق شکل ۴ اصلاح شده لحاظ می‌شود. رابطه هندسی میان شعاع انحنا، طول ترک اولیه و جابه‌جایی دهانه به شکل معادله‌های (۱) تا (۳) قابل استخراج است:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2\rho} \quad (1)$$

$$\frac{\delta}{2} = \rho(1 - \cos\alpha) \quad (2)$$

$$\delta_{DCB} = \frac{a^2}{\rho} \quad (3)$$

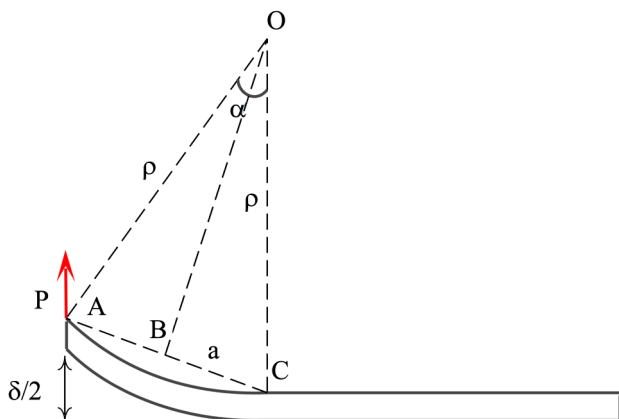
که  $\delta_{DCB}$  و  $\rho$ ،  $a$ ،  $\alpha$  به ترتیب زاویه رأس کمان بخش ترک‌خورده نمونه DCB، طول ترک، شعاع انحنای کمان بخش ترک‌خورده قطعه DCB و جابه‌جایی دهانه ترک است که در شکل ۴ نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل ۵ برای قطعه ADCB می‌توان نوشت:

$$\delta_{1ADCB} = \frac{(a + \varepsilon)^2}{2\rho_1} \quad (4)$$

$$\delta_{2ADCB} = \frac{a^2}{2\rho_2} \quad (5)$$

که  $a$  طول ترک،  $\rho_1$  و  $\rho_2$  به ترتیب شعاع انحنای کمان بخش ترک‌خورده بازوی بالایی و پایینی قطعه ADCB،  $\delta_{1ADCB}$  و  $\delta_{2ADCB}$  به ترتیب جابه‌جایی نوک بازوهای بالایی و پایینی نمونه ADCB نسبت به محل اولیه ترک هستند و  $\varepsilon$  پارامتر اصلاح طول ترک است. پارامترهای هندسی مزبور در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. برای تیر تحت خمش می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{EI}{M} \quad (6)$$



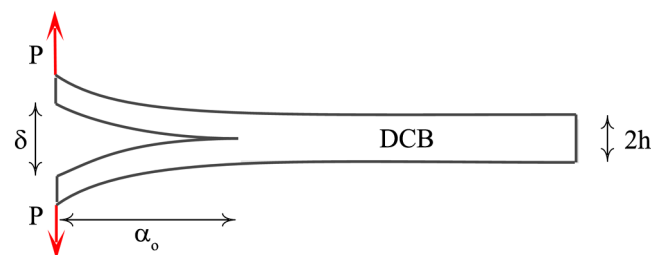
شکل ۴- نصف قطعه DCB.

نیاز مستقیم به آزمون‌های تجربی و نیز مدل‌سازی اجزای محدود قطعه در نرم‌افزار از روی نتایج مربوط به آزمون قطعات تک‌جهتی پیش‌بینی شود. مقدار بحرانی سرعت رهایی انرژی کرنشی شروع جدایش لایه‌ها در چیدمان‌های چندجهتی ADCB با استفاده از مقادیر معلوم سرعت رهایی انرژی کرنشی در شروع جدایش لایه‌ها در شیوه اول چیدمان‌های تک‌جهتی پیش‌بینی شده است. در ادامه، روشی برای پیش‌بینی بازشدگی دهانه ترک در شروع جدایش لایه‌های چیدمان‌های چندجهتی ADCB براساس آزمون نمونه تک‌جهتی DCB ارائه شده است. سپس با جاگذاری مقادیر به دست آمده در مدل‌های تحلیلی، سرعت رهایی انرژی کرنشی در شروع جدایش لایه‌های نمونه‌های ADCB پیش‌بینی می‌شوند. در نهایت، نتایج به دست آمده از روش پیش‌بینی با نتایج مدل‌سازی عددی و تجربی مقایسه شده است. این روش، حجم محاسبات عددی و نیز هزینه مطالعات تجربی را به مقدار چشم‌گیری کاهش می‌دهد.

#### ارائه مدل

در این بخش سعی شده است، رابطه‌ای بین بازشدگی دهانه نمونه‌های DCB و ADCB ایجاد شود. هدف از ایجاد چنین رابطه‌ای این است که بتوان با آن مقدار سرعت رهایی انرژی کرنشی کامپوزیت‌های لایه‌ای نمونه‌های ADCB را با استفاده از آزمون نمونه تک‌جهتی DCB محاسبه کرد. برای ایجاد چنین رابطه‌ای از هندسه نمونه استفاده می‌شود. در مراجع از جمله استاندارد ASTM D 5528 طول ترک نشان داده شده در شکل ۳ در نظر گرفته می‌شود. در روش کاهش یافته نظریه تیر اصلاح شده (MBT)، طول ترک با استفاده از مقداری مثبت اصلاح می‌شود، یعنی طول ترک اصلاح شده مقداری بزرگ‌تر از طول ترک نشان داده شده در شکل ۳ است [۱]. بنابراین همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، طول ترک برابر طول خط AC در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس، روشی برای ایجاد رابطه بین بازشدگی دهانه نمونه‌های DCB و ADCB مورد توجه قرار می‌گیرد.

برای ایجاد چنین رابطه‌ای مطابق شکل ۴ نصف تیر DCB در نظر



شکل ۳- قطعه DCB هنگام بارگذاری.

- ۲- اعمال ضریب  $D_2$  در معادلات برای کاهش خطای به وجود آمده در اثر ساده‌سازی و
- ۳- عرض یکسان دو نمونه.
- در نهایت، با در نظر گرفتن فرض‌های گفته شده، می‌توان نوشت:

$$\frac{\delta_{ADCB}}{\delta_{DCB}} = \frac{\delta_{IADCB} + \delta_{2ADCB}}{\delta_{DCB}} \quad (9)$$

$$\frac{\delta_{ADCB} + D_1}{\delta_{DCB}} = \frac{Eh^3}{2} \left( \frac{E_1 h_1^3 + D_2^m E_2 h_2^3}{E_1 E_2 h_1^3 h_2^3} \right) \quad (10)$$

در این معادله‌ها  $D_1, D_2, m$  پارامترهای هندسی هستند که با استفاده از معادله‌های (۱۱) تا (۱۳) تخمین زده شده‌اند:

$$D_1 = h_1 - h_2 \quad (11)$$

$$D_2 = h_1/h_2 \quad (12)$$

$$m = 1 - (h_1/h_2) \quad (13)$$

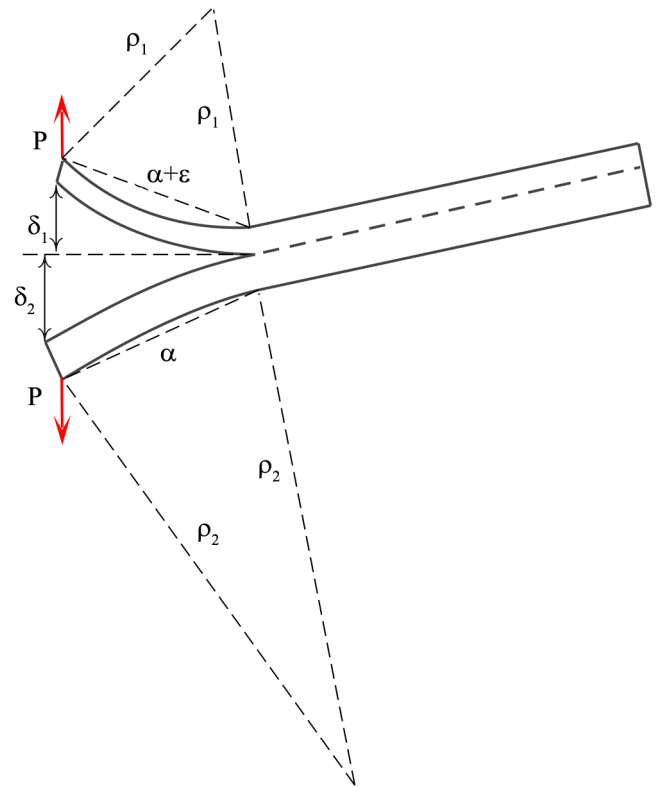
با داشتن نتایج تجربی هر نمونه تک‌جهتی DCB و استفاده از معادله (۱۰) و معادله‌های تحلیلی یا مدل‌سازی نمونه‌های چندجهتی ADCB، می‌توان سرعت رهایی انرژی کرنشی در شروع جدایش لایه‌های نمونه‌های چندجهتی ADCB را پیش‌بینی کرد. روش ارائه شده در این بخش دارای این محدودیت است که باید ضخامت نمونه کلی نمونه‌های DCB و ADCB یکسان باشد. خطای مربوط به این روش ناشی از موارد زیر است:

- حذف مقدار  $\varepsilon$  در رابطه نهایی،
- اندازه‌گیری تجربی،
- تخمین ضرایب  $D_1, D_2$  و  $m$ .
- محاسبات و
- تخمین طول ترک.

با استفاده از معادله (۱۰) و مدل‌های تحلیلی یا مدل‌سازی عددی که در ادامه بررسی می‌شود، مقدار سرعت رهایی انرژی کرنشی برای نمونه ADCB قابل محاسبه است.

#### مدل‌سازی عددی

روش‌های گوناگونی برای محاسبه سرعت رهایی انرژی کرنشی



شکل ۵- هندسه قطعه ADCB.

در این معادله  $E, I, M$  به ترتیب مدول کشسانی خمشی مؤثر در راستای طول، ممان اینرسی هر بازو و گشتاور خمشی اعمال شده بر نمونه DCB هستند. رابطه بین شعاع انحنا و گشتاور خمشی بازوهای یک و دو نمونه ADCB به ترتیب به شکل معادله‌های (۷) و (۸) به دست می‌آیند:

$$\rho_1 = \frac{E_1 I_1}{M_1} \quad (7)$$

$$\rho_2 = \frac{E_2 I_2}{M_2} \quad (8)$$

در معادله (۷)  $E_1, I_1, M_1$  به ترتیب مدول کشسانی خمشی مؤثر در راستای طول، ممان اینرسی و گشتاور خمشی اعمال شده بر بازوی بالایی و در معادله (۸)  $E_2, I_2, M_2$  به ترتیب مدول کشسانی خمشی مؤثر در راستای طول، ممان اینرسی و گشتاور خمشی اعمال شده بر بازوی پایینی نمونه ADCB هستند. برای به دست آوردن رابطه بین بازشدگی دهانه نمونه‌های DCB و ADCB فرض‌هایی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند:

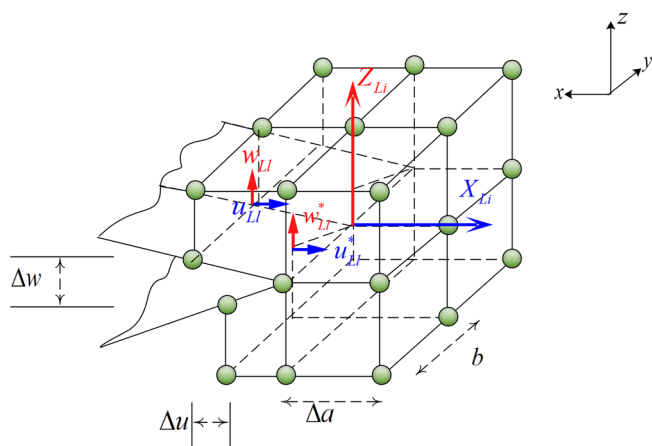
- ۱- به کارگرفتن ضریب  $C_1$ ، برای لحاظ کردن اثر اختلاف ضخامت بازوهای نمونه ADCB،

اصلاحات لازم برای زمانی که تحلیل اجزای محدود از لحاظ هندسی غیرخطی باشد یا اجزای نوک ترک اندازه‌های متفاوتی داشته باشند پیشنهاد شده است. Prombut و همکاران [۱۰] با استفاده از روش VCCT و نرم‌افزار اجزای محدود SAMCEF جدایش لایه‌ها را در چندلایه‌های چندجهتی مطالعه کرده و مدل‌های اجزای محدود سه‌بعدی را برای تعیین سرعت رهایی انرژی به‌کار گرفته‌اند. Bennati و همکاران [۱۱] از روش VCCT برای پیش‌بینی رشد جدایش لایه‌ها در قطعات ADCB استفاده کرده و نشان دادند که نتایج حاصل از آن انطباق خوبی با نتایج تحلیلی و تجربی دارد.

در انتخاب اندازه اجزا در نوک ترک هنگام استفاده از VCCT برای شبیه‌سازی رشد ترک باید دقت کرد. Raju و Wang [۱۲] نشان دادند، مؤلفه‌های سرعت آزادشدن انرژی هنگامی که نسبت اندازه اجزای نوک ترک به ضخامت لایه افزایش یابد همگرا نمی‌شود.

در یک مدل اجزای محدود سه‌بعدی که از اجزای سه‌بعدی توپر (solid)، صفحه یا پوسته تشکیل شده است، جدایش لایه‌ها به طول  $a$  به شکل ناپیوستگی دوبعدی بین دو سطح تعریف می‌شود. بعد سوم این امکان را فراهم می‌کند که توزیع سرعت رهایی انرژی کرنشی در طول نوک ترک به‌دست آید و  $G_{III}$  محاسبه شود که در مدل‌های دوبعدی برابر صفر است. گره‌ها در سطوح بالایی و پایینی همان‌طور که قبلاً گفته شد، مختصات یکسانی دارند. اما متصل نیستند. در شکل ۶ بخشی از ناحیه جدایش لایه‌ها نشان داده شده که با اجزای ۸ گره‌ای مدل‌سازی شده است. مؤلفه‌های سرعت رهایی انرژی کرنشی یعنی  $G_I$  و  $G_{II}$  به شکل معادله‌های (۱۴) و (۱۵) قابل محاسبه هستند:

$$G_I = -\frac{1}{2\Delta A} Z_{Li} \cdot (w_L - w_{Li}^*) \quad (14)$$



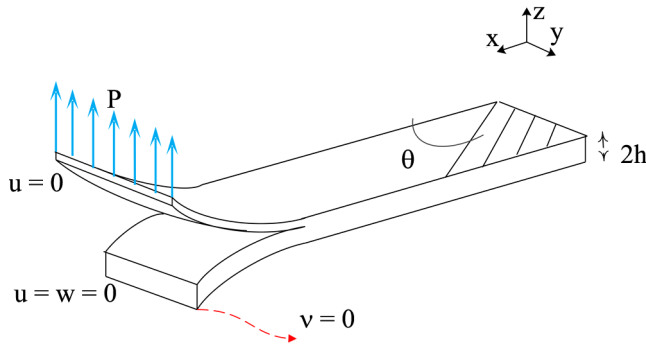
شکل ۶- روش VCCT برای اجزای ۸ گره‌ای سه‌بعدی.

براساس نتایج به‌دست آمده از تحلیل‌های اجزای محدود استفاده شده است. از پرکاربردترین روش‌های پیش‌بینی چقرمگی شکست در مواد کامپوزیتی روش بسته‌شدن مجازی ترک (VCCT) بوده که روشی تقریبی بر پایه مکانیک شکست است [۵،۶]. این روش بر پایه دو فرض عمده بنا شده است:

- ۱- زمانی که ترک رشد می‌کند، مقدار انرژی آزاد شده برابر با مقدار انرژی لازم برای بستن دهانه ترک است.
- ۲- در زمان رشد ترک، حالت تنش در نوک ترک به‌طور یکنواخت فرض می‌شود.

این فرضیه در حالتی که طول رشد ترک در مقایسه با طول ترک کوچک فرض شود، قابل قبول است. روش بسته‌شدن مجازی ترک به‌طور گسترده برای محاسبه سرعت رهایی انرژی کرنشی براساس نتایج حاصل از آزمون سه‌بعدی اجزای محدود به‌کار می‌رود. برای جدایش لایه‌ها در کامپوزیت‌های لایه‌ای که در آن معیار شکست بسیار وابسته به نسبت اختلاط شیوه‌هاست (mixed mode ratio) و رشد جدایش لایه‌ها در صفحه چندلایه‌ای اتفاق می‌افتد، VCCT برای تعیین سرعت رهایی انرژی کرنشی بیشترین استفاده را داشته است. روش VCCT را که Rybicki و Kanninen [۷] پیشنهاد کرده‌اند، در کامپوزیت‌ها برای پیش‌بینی رشد تخریب به‌کار برده می‌شود. این روش مبتنی بر فرض اروین است که بیان می‌کند، هنگامی که ترک مقدار کمی رشد کند، انرژی جذب شده در این فرایند برابر با کار لازم برای بستن ترک و ایجاد همان طول اولیه است. پس سرعت رهایی انرژی از نیروهای گرهی و جابه‌جایی‌های به‌دست آمده از مدل اجزای محدود قابل محاسبه است. این فرایند هنگامی کارایی محاسباتی دارد که شبکه‌بندی به اندازه کافی ریز باشد و همه اجزای نوک ترک ابعاد یکسانی در راستای رشد ترک داشته باشند. در این شرایط، سرعت آزادشدن انرژی فقط از یک تحلیل قابل محاسبه است.

Krueger [۸] اثر نرم‌افزار اجزای محدود به‌کار گرفته شده را بر مقدار محاسبه شده برای سرعت رهایی انرژی کرنشی به تفصیل بررسی کرده است. در این راستا، چند نمونه آزمون از جمله DCB استفاده شده و حل اجزای محدود با استفاده از دو نرم‌افزار ANSYS و ABAQUS انجام شده است. با توجه به کارایی و اهمیت روش VCCT در محاسبات عددی سرعت رهایی انرژی کرنشی و بررسی جدایش لایه‌ها، Krueger [۹] تاریخچه، اصول و کاربردهای روش VCCT را به تفصیل بررسی کرده است. در این مطالعه، معادله‌های متناظر با اجزای دوبعدی با توابع فرمی خطی و مرتبه دو ارائه شده است. همچنین، معادله‌های مورد نیاز برای اجزای سه‌بعدی در محاسبات سرعت رهایی انرژی کرنشی آورده شده است.



شکل ۸- شرایط بارگذاری و مرزی نمونه مدل‌سازی شده.

شیوه‌های اول و دوم) ارائه کرد. این مدل براساس بارها و گشتاورهای خمشی اعمالی بر نمونه ایجاد شده است. براساس نظریه تیر کشسان راه‌حلی نظری برای نمونه ADCB پایه‌گذاری شده است [۴]. Creton و همکاران [۱۴] معادله‌ای برای محاسبه مقدار SERR براساس تیر بر بستر کشسان (مدل Kanninen) ارائه کردند.

#### مدل تیر کشسان

براساس نظریه تیر کشسان مدلی تحلیلی برای محاسبه سرعت رهایی انرژی کرنشی در نمونه ADCB پایه‌گذاری شده است. در این روش، هر بازو به شکل تیر یک‌سرگیردار کشسان مدل‌سازی شده است [۴]. درنهایت، با این روش می‌توان از معادله (۱۶) سرعت رهایی انرژی کرنشی را محاسبه کرد:

$$G = \frac{3\delta^2 E_1 E_2 h_1^3 h_2^3}{8a^4 (E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3)} \quad (16)$$

که در این معادله، \$E\_1\$ و \$E\_2\$ مدول‌های خمشی مؤثر هر یک از بازوها، \$h\_1\$ و \$h\_2\$ ضخامت بازوها، \$\delta\$ جابه‌جایی دهانه ترک در محل اعمال بار و \$a\$ طول ترک نمونه است.

#### مدل تیر بر بستر کشسان

Creton و همکاران [۱۴] معادله‌ای برای محاسبه مقدار SERR براساس تیر بر بستر کشسان (مدل Kanninen) ارائه کردند. در این روش مقدار سرعت رهایی انرژی کرنشی با استفاده از معادله (۱۷) قابل محاسبه است:

$$G = \frac{3\delta^2 E_1 E_2 h_1^3 h_2^3 (C_2^3 E_2 h_1^3 + C_1^3 E_1 h_2^3)}{8a^4 (C_2^3 E_1 h_1^3 + C_1^3 E_2 h_2^3)^2} \quad (17)$$

در این معادله \$E\_1\$ و \$E\_2\$ مدول‌های خمشی مؤثر هر بازو، \$h\_1\$ و \$h\_2\$

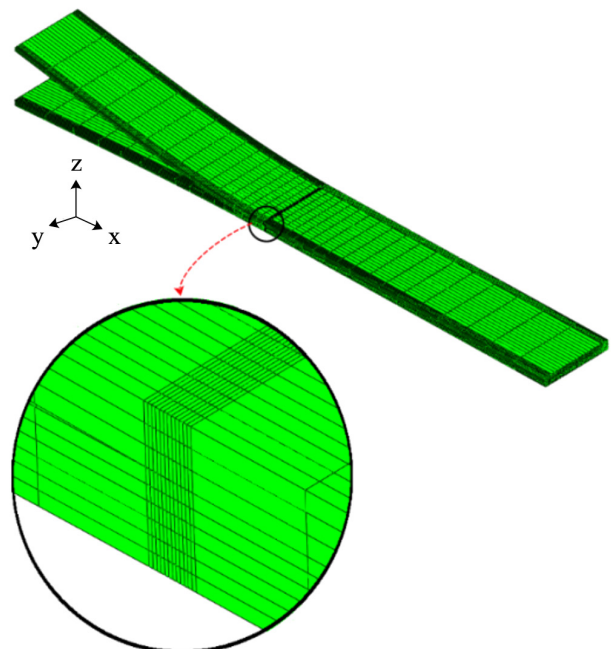
$$G_{II} = -\frac{1}{2\Delta A} X_{Li} \cdot (u_L - u_{Li}^*) \quad (15)$$

در این معادله‌ها، \$\Delta A = \Delta a \times b\$، مساحتی است که به شکل مجازی بسته می‌شود و \$b\$ پهنای هر جز است. \$X\_{Li}\$ و \$Z\_{Li}\$ نشان‌دهنده نیروهای نوک ترک در ستون \$L\$ و سطر \$i\$ هستند. جابه‌جایی‌های متناظر پشت جدایش لایه‌ها در سطح بالایی و در سطح پایینی مطابق شکل ۶ نشان داده شده‌اند. مدل‌سازی قطعات ADCB با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS به شکل سه‌بعدی و با در نظر گرفتن اجزای آجری هشت گره‌ای (C3D8R) انجام شده است. گفتنی است، نتایج ارائه شده برای \$\Delta a = t/20\$ (پس از همگرایی) به دست آمده است. شکل ۷ مش‌بندی در مدل اجزای محدود و بزرگ‌نمایی نزدیک نوک ترک را برای نمونه نشان می‌دهد.

شکل ۸ طرح کلی بارگذاری و شرایط مرزی مدل را نشان می‌دهد. از تغییر مکان‌های لبه پایینی و بالایی در جهت \$x\$ ممانعت می‌شود، یعنی \$u = 0\$، \$v\$، \$y\$، گرگ گوشه پایین صفر در نظر گرفته می‌شود.

#### مدل‌های تحلیلی

در سال‌های اخیر مدل‌هایی تحلیلی برای تخمین سرعت رهایی انرژی کرنشی نمونه ADCB گزارش شده است. Williams [۱۳] روشی را برای محاسبه سرعت رهایی انرژی کرنشی و مؤلفه‌های آن (یعنی



شکل ۷- نمونه مدل‌سازی شده و بزرگ‌نمایی اطراف ترک.

جدول ۱- خواص کشسان کامپوزیت شیشه- اپوکسی [۱۵].

مدول کششی در راستای الیاف، (GPa) $E_1$	مدول برشی، (GPa) $G_{12}$	مدول کششی عمود بر الیاف، (GPa) $E_2$	ضریب پواسون، $\nu_{12}$
۲۵/۷	۲/۵	۶/۵	۰/۳۲

جدول ۲- مقایسه نتایج جابه‌جایی دهانه ترک (mm) هنگام شروع جدایش لایه‌های نمونه‌های ADCB.

$h_1/h_2$	۱	۰/۷۸	۰/۶	۰/۴۵	۰/۳۳	۰/۲۳
نتایج تجربی [۱۵]	۲/۸	۴/۲	۵/۱	۵/۸	۷/۳	۱۲/۱
مدل‌سازی عددی	۲/۶	۳/۴	۴/۲	۴/۹	۷/۱	۱۱/۶
معادله (۱۰)	-	۳/۶	۴/۷	۶/۲	۸/۳	۱۲/۰۳

مقدار پیش‌بینی شده با استفاده از معادله (۱۰) برای هر نسبت ضخامت گفته شده است.

شایان ذکر است، تعداد اجزای به‌کار رفته برای شبکه‌بندی نمونه‌ها در نرم‌افزار برابر ۱۴۲۰۸ جزء مکعبی با هشت گره است. همان‌طور که از مقایسه نتایج روش پیش‌بینی، معادله (۱۰) و نتایج تجربی و مدل‌سازی عددی برمی‌آید، این رابطه هندسی با خطای بسیار ناچیز نسبت به مقادیر تجربی، قابلیت پیش‌بینی مقادیر جابه‌جایی دهانه ترک را هنگام شروع جدایش لایه‌ها نمونه‌های ADCB دارد.

در جدول ۳ سرعت رهایی انرژی کرنشی با استفاده از روش‌های اجزای محدود، تحلیلی و تجربی آمده است. گفتنی است، با استفاده از مقادیر جابه‌جایی دهانه ترک، به‌دست آمده از معادله (۱۰)، نتایج تحلیلی محاسبه شده‌اند. در جدول ۴ خطای سرعت رهایی انرژی کرنشی دو روش مدل‌سازی عددی و پیش‌بینی نسبت به نتایج تجربی خلاصه شده‌اند. مشاهده می‌شود، روش ارائه شده با خطای ناچیز نسبت به روش تجربی را می‌توان برای محاسبه سرعت رهایی انرژی کرنشی به‌کار برد.

## مسئله موردی ۲

Prombut و همکاران [۱۰] نمونه‌های ۱۲ لایه‌ای DCB و ADCB، ساخته شده از الیاف کربن و رزین اپوکسی را با ضخامت هر لایه ۰/۲۶ mm، طول ترک ۴۰ mm و عرض ۲۰ mm به روش تجربی مطالعه کردند. نسبت ضخامت بازوهای این نمونه‌ها ۱ به ۳ ( $h_2/(h_1+h_2)=1/3$ ) بود. خواص کشسان این نمونه‌ها برای هر لایه در

جدول ۳- نتایج سرعت رهایی انرژی کرنشی ( $J/m^2$ ) هنگام شروع جدایش لایه‌های نمونه‌های ADCB با استفاده از روش‌های مختلف.

$h_1/h_2$	۱	۰/۷۸	۰/۶	۰/۴۵	۰/۳۳	۰/۲۳
نتایج تجربی [۱۰]	۲۴۶	۳۳۰	۳۳۵	۳۵۰	۴۱۵	۶۰۰
مدل‌سازی عددی	۲۵۱	۳۴۹	۴۲۰	۳۹۹	۴۶۴	۵۶۸
معادله (۲۰)	-	۳۱۹	۳۲۵	۳۵۴	۴۴۱	۵۸۳

ضخامت هر یک از بازوها،  $\delta$  جابه‌جایی دهانه ترک در محل اعمال بار،  $a$  طول ترک نمونه و  $C_1$  و  $C_2$  پارامترهای هندسی هستند که از معادله‌های (۱۸) و (۱۹) تخمین زده شده‌اند:

$$C_1 = 1 + 0/64 (h_1/a) \quad (18)$$

$$C_2 = 1 + 0/64 (h_2/a) \quad (19)$$

در محاسبه سرعت رهایی انرژی کرنشی با استفاده از روش‌های تحلیلی باید استحکام خمشی مؤثر چندلایه‌ای محاسبه شود. استحکام خمشی مؤثر هر بازوی نمونه ADCB با استفاده از روش‌هایی تخمین زده می‌شوند که در مرجع ۱۶ معرفی شده‌اند. سپس، استحکام خمشی مؤثر چندلایه‌ای کل نمونه محاسبه می‌شود.

با جاگذاری معادله (۱۰) در معادله (۱۷)، سرعت رهایی انرژی کرنشی به شکل معادله (۲۰) بیان می‌شود:

$$G = \frac{3E_1E_2h_1^3h_2^3(C_2^3E_1h_1^3 + C_1^3E_2h_2^3)}{8a^4(C_2^3E_1h_1^3 + C_1^3E_2h_2^3)^2} \left[ \frac{\delta_{DCB}Eh^3}{2} \left( \frac{E_1h_1^3 + C_1^3E_2h_2^3}{E_1E_2h_1^3h_2^3} \right) \right] \quad (20)$$

## نتایج و بحث

### مسئله موردی ۱

برای ارزیابی معادله (۱۰) از نتایج تجربی موجود در مراجع [۱۵، ۱۰] استفاده شد. Ducept و همکاران [۱۵] یک نمونه DCB و پنج نمونه ADCB، ۱۶ لایه‌ای را با ضخامت کل ۵ mm، طول ترک ۳۵ mm و عرض ۲۰ mm ساختند و آزمایش کردند. ماده کامپوزیتی استفاده شده شیشه - اپوکسی بوده که خواص کشسان هر لایه آن در جدول ۱ آمده است. نسبت ضخامت بازوهای نمونه‌های ADCB در جدول ۲ آمده است. همچنین، در این جدول مقادیر جابه‌جایی دهانه ترک هنگام شروع جدایش لایه‌های مربوط به نتایج تجربی، مدل‌سازی عددی و



جدول ۴- خطای (برحسب درصد) سرعت رهایی انرژی کرنشی هنگام شروع جدایش لایه‌ها نمونه‌های ADCB براساس روش‌های مدل‌سازی عددی و معادله (۲۰) نسبت به نتایج تجربی [۱۰].

$h_1/h_2$	۱	۰/۷۸	۰/۶	۰/۴۵	۰/۳۳	۰/۲۳
خطا (مدل‌سازی عددی نسبت به تجربی)	۲/۰۳	۵/۷۶	۲۵/۳۷	۱۴/۰۰	۱۱/۸۱	-۵/۳۳
خطا (معادله (۲۰) نسبت به تجربی)	-	-۳/۳۳	-۲/۹۹	۱/۱۴	۶/۲۷	-۲/۸۳

جدول ۵- خواص کشسان کربن-اپوکسی [۱۰].

مدول کششی در راستای الیاف (GPa) <sub>۱</sub>	مدول برشی، $G_{12}$ (GPa)	مدول کششی عمود بر الیاف، $E_2$ (GPa)	ضریب پواسون
۹۸/۶۲	۴/۷۵	۷/۶۹	۰/۳۳

برای شبکه‌بندی نمونه‌های DCB و ADCB در نرم‌افزار برابر ۱۲۸۳۶ جزء مکعبی است. از مقایسه نتایج روش پیش‌بینی، معادله (۱۰)، نتایج تجربی و مدل‌سازی عددی برمی‌آید که این رابطه هندسی، با خطای بسیار ناچیز نسبت به مقادیر تجربی، می‌تواند مقادیر جابه‌جایی دهانه ترک را هنگام شروع جدایش لایه‌ها نمونه ADCB پیش‌بینی کند.

### نتیجه‌گیری

روشی برای پیش‌بینی سرعت رهایی انرژی کرنشی نمونه‌های ADCB توسعه یافت. رابطه‌ای بین چقرمگی شکست تیرهای یک‌سرگردار دولبه (DCB) و یک‌سرگردار دولبه نامتقارن (ADCB) ارائه شد. در این روش، مقدار سرعت رهایی انرژی کرنشی شروع جدایش لایه‌های قطعات ADCB با استفاده از مقادیر معلوم سرعت رهایی انرژی کرنشی در شروع و گسترش جدایش لایه‌ها شیوه اول چیدمان‌های قطعات DCB پیش‌بینی شد. این روش براساس هندسه نمونه‌های DCB و ADCB توسعه یافت. از مقایسه نتایج روش پیش‌بینی، اجزای محدود و تجربی می‌توان نتیجه گرفت، مدل ارائه شده روشی ساده برای پیش‌بینی مقدار شیوه ترکیبی اول و دوم سرعت رهایی انرژی کرنشی کامپوزیت‌های لایه‌ای است. همچنین مشاهده شد، روش VCCT روشی ساده اما بسیار کاربردی، در زمینه مطالعه قطعات کامپوزیتی تحت شکست است. بنابراین، می‌توان کاهش هزینه ناشی از ساخت قطعات ADCB و هزینه مطالعات تجربی، کاهش محاسبات مربوط به مدل‌سازی عددی، خطای قابل قبول و قابل استفاده برای همه سامانه‌های (جنس) کامپوزیتی لایه‌ای را از مهم‌ترین مزایای روش جامع به‌شمار آورد.

جدول ۵ آمده است. ضخامت کل نمونه‌های DCB و ADCB برابر بود،  $(h_1+h_2=2h)$ . هر کدام از نمونه‌های DCB و ADCB با پنج طول ترک مختلف ساخته شده‌اند.

در جدول ۶ جابه‌جایی دهانه ترک هنگام شروع و رشد جدایش لایه‌ها در مقادیر مختلف طول ترک نمونه DCB با استفاده از دو روش تجربی و مدل‌سازی عددی آمده است. با جاگذاری مقادیر تجربی این جدول در معادله (۱۰)، به‌عنوان مقدار معلوم، می‌توان جابه‌جایی دهانه نمونه ADCB براساس جابه‌جایی دهانه نمونه DCB را در هر طول ترک خاص پیش‌بینی کرد.

در جدول ۷ مقادیر جابه‌جایی دهانه ترک هنگام شروع جدایش لایه‌ها مربوط به نتایج تجربی، مدل‌سازی عددی و مقدار پیش‌بینی شده با استفاده از معادله (۱۰) برای هر طول ترک آمده است. تعداد اجزای به‌کار رفته

جدول ۶- جابه‌جایی دهانه ترک (mm) هنگام شروع جدایش لایه‌ها نمونه DCB.

طول ترک	۴۵	۵۰	۵۵	۶۰	۶۵
نتایج تجربی [۱۰]	۵/۷۶	۷/۴۱	۹/۳۵	۱۱/۱۶	۱۳/۳۱
مدل‌سازی عددی	۵/۵۸	۷/۲۷	۹/۱۲	۱۱/۳۳	۱۳/۸۵

جدول ۷- مقایسه نتایج جابه‌جایی دهانه ترک (mm) هنگام شروع جدایش لایه‌ها نمونه ADCB براساس جابه‌جایی دهانه نمونه DCB (جدول ۵).

طول ترک	۴۵	۵۰	۵۵	۶۰	۶۵
نتایج تجربی [۱۰]	۸/۰۶	۱۰/۳۵	۱۳/۰۱	۱۶/۰۲	۱۹/۰۱
مدل‌سازی عددی	۸/۰۷	۱۰/۵۳	۱۳/۷۲	۱۷/۰۶	۲۰/۰۷
معادله (۱۰)	۹/۱۲	۱۱/۴۴	۱۴/۱۶	۱۶/۷۱	۱۹/۷۲

## مراجع

- Standard Test Method for Mode I Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites ASTM D5528, Annual Book of ASTM Standards, 15, 1-12, 2007.
- Nikbakht M. and Choupani N., Experimental Investigation of Mixed Mode Fracture of Thermoplastic Composite Materials, *16th International Conference of Mechanical Engineering*, Shahid Bahonar University, Kerman, 2008.
- Tay T.E., Characterization and Analysis of Delamination Fracture in Composites: An Overview of Developments from 1990 to 2001, *Appl. Mech. Rev.*, **56**, 1-31, 2003.
- Recent Advances in Structural Joints and Repairs for Composite Materials*, Tong L. and Soutis C. (Eds.), Kluwer Academic, Dordrecht (The Netherlands), 2003.
- Chang F.K. and Chang K.Y., A Progressive Damage Model for Laminated Composites Containing Stress Concentrations, *J. Compos. Mater.*, **21**, 834-855, 1987.
- Heidari Rarani M., *Modeling of Delamination Propagation of Symmetric Composite Double Cantilever Beam under Static Loading Conditions*, PhD Thesis, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, 2011.
- Rybicki E.F. and Kanninen M.F., A Finite Element Calculation of Stress Intensity Factors by a Modified Crack Closure Integral, *Eng. Fract. Mechanic.*, **9**, 931-938, 1977.
- Krueger R. and Goetze D., Influence of Finite Element Software on Energy Release Rates Computed Using the Virtual Crack Closure Technique: History, Approach and Applications, NASA/CR-214523, 2006.
- Krueger R., The Virtual Crack Closure Technique: History, Approach and Applications, NASA/CR-211628, 2002.
- Prombut P., Michel L., Lachaud F., and Barrau J.J., Delamination of Multidirectional Composite Laminates at  $0//\Theta$  Ply Interfaces, *Eng. Fract. Mech.*, **73**, 2427-2442, 2006.
- Bennati S., Colleluori M., Corigliano D., and Valvo P.S., An Enhanced Beam-Theory Model of the Asymmetric Double Cantilever Beam (ADCB) Test for Composite Laminates, *Compos. Sci. Technol.*, **69**, 1735-1745, 2009.
- Wang J.T. and Raju I.S., Strain Energy Release Rate Formulae for Skin-Stiffener Debond Modeled with Plate Elements, *Eng. Fract. Mech.*, **54**, 211-228, 1996.
- Williams J.G., On the Calculation of Energy Release Rates for Cracked Laminates, *Int. J. Fract.*, **36**, 101-119, 1988.
- Creton C., Kramer E.J., Hui C.Y., and Brown H.R., Failure Mechanisms of Polymer Interfaces Reinforced with Block Copolymers, *Macromolecules*, **25**, 3075-3088, 1992.
- Ducept F., Gamby D., and Davies P., A Mixed-Mode Failure Criterion Derived from Tests on Symmetric and Asymmetric Specimens, *Compos. Sci. Technol.*, **59**, 609-619, 1999.
- Shokrieh M.M., Heidari Rarani M., and Ayatollahi M.R., Calculation of  $G_I$  for a Multidirectional Composite Double Cantilever Beam on Two-Parametric Elastic Foundation, *Aerosp. Sci. Technol.*, **15**, 534-543, 2011.