تحلیل رفتار کششی الاستومرها با استفاده از روش المانهای محدود

Tension Behavior Analysis of Elastomers by Finite Elements Method

حمیدرضا قریشی

مرکز تحقیقات و توسعه علوم و تکنولوژی مواد پلیمری

واژه‌های کلیدی:

تحلیل تنش ــ کرنش، روشهای ریاضی، روش المانهای محدود، طراحی قطعات لاستیکی، تحلیل غیر خطی

چکیده

استفاده از روشهای ریاضی در تحلیل تنش ــ کرنش قطعات لاستیکی برای دستیابی به طراحی بهینه، امروزه کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است. در این میان، روش المانهای محدود به عنوان یکی از بهترین روشهای ریاضی جایگاه ویژه‌ای در طراحی دارد. در این مقاله، ابتدا روش المانهای محدود معرفی می‌شود و در پی آن کاربرد این روش در تحلیل تنش ــ کرنش قطعات لاستیکی بررسی خواهد شد. در بخش پایانی نیز نتایج حاصل از محاسبات توسط این روش برای یک صفحه لاستیکی که تحت نیروی کششی قرار دارد، ارائه می‌شود.

مقدمه

طراحی و ساخت قطعات لاستیکی صرف‌نظر از تکنولوژی ساخت از دو جنبه می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد که عبارت‌اند از: آمیزه‌سازی (*compounding*) و ساختاری (*construction*). از نظر آمیزه‌کاری به دلیل ماهیت ویژه این مواد و ضرورت دستیابی به خصوصیتهای فیزیکی و مکانیکی موردنظر، مسئله آمیزه‌سازی با سایر مواد افزودنی نظیر عوامل پیوند عرضی، پر کننده، نرم کننده و پایدارکننده مورد بحث قرار می‌گیرد. از دیدگاه ساختاری، رفتار قطعه ساخته شده در برابر تنشها و نیروهای وارد شده (مکانیکی یا گرمایی) بررسی می‌شود. به عبارت دیگر، هدف از مطالعه ساختاری، تعیین مقادیر کمی خصوصیتهای فیزیکی و مکانیکی موردنظر است که باید با انتخاب صحیح اجزای آمیزه و اختلاط مناسب به آن رسید. بحث مقاله حاضر روی جنبهٔ دوم، یعنی تحلیل ساختاری متمرکز می‌شود. چنین تحلیلهایی به صورتهای گوناگون می‌تواند انجام گیرد. در برخی تحلیلها تجربه راهگشای مسئله است. بدین معنی که با مطالعه نمونه‌های ساخته شده و مشاهده رفتار آنها در برابر نیروهای وارد شده می‌توان به خصوصیات فیزیکی و مکانیکی آنها دست یافت. به دلایل گوناگون، استفاده از این روش همواره جوابگو نیست و نمی‌توان از آن به عنوان ابزاری قوی در جهت تحلیل رفتار قطعات در برابر تنشهای وارد شده بهره جست. دلایل مهمتر عبارت‌اند از: عدم دسترسی به قطعات پیش ساخته، جدید بودن روش طراحی و اقتصادی نبودن ساخت قطعات مختلف. روش غیرتجربی، تحلیل ریاضی مسئله است. به طورکلی، منظور از تحلیل ریاضی تعیین معادله‌های ریاضی حاکم بر مسئله موردنظر است که توسط آنها متغیرهای وابسته و مستقل به یکدیگر ربط پیدا می‌کنند و از طریق حل همین معادله‌هاست که می‌توان رابطه بین متغیرهای موردنظر را پیدا کرد. معادله‌های ریاضی معمولاً به یکی از سه صورت جبری، دیفرانسیل و انتگرال می‌باشند. این معادله‌ها برای مسئله مورد بحث در این مقاله، یعنی یافتن مقادیر تنش و کرنش به عنوان متغیرهای وابسته برحسب مقادیر بار وارد شده، از نوع دیفرانسیلی می‌باشند. از این‌رو، با تعیین معادله‌های حاکم بر مسئله و حل آنها همراه با شرایط مرزی مناسب می‌توان به مقادیر تنش و کرنش در نقاط گوناگون قطعه دست یافت و از این راه به نقطه‌های ضعف آن پی برد و نسبت به اصلاح آنها اقدام کرد و سرانجام به طرح بهینه رسید.

برای اغلب مسائل مهندسی تعیین معادله‌های دیفرانسیل کار مشکلی نیست، ولی آنچه موجب پیچیده شدن مسئله می‌شود حل این معادله‌هاست. روشن است که از حل یک معادله دیفرانسیل بی‌نهایت جواب به دست می‌آید که هر یک از این جوابها مربوط به مجموعه‌ای از شرایط مرزی است و در اساس آنچه که حل یک معادله را ممکن یا ناممکن می‌سازد، همین شرایط مرزی است. در اصل حل تحلیلی یک معادله دیفرانسیل تنها در حالتهای بسیار ساده و خاصی از شرایط مرزی ممکن است و در عمل تعیین جواب برای بسیاری از مسائل علمی و

Key Words: stress-strain analysis, mathematical methods, finite elements method, design of rubber articles, nonlinear analysis

مهندسی میسر نیست. از این رو، استفاده از روشهای عددی ضرورت تام دارد. تحلیل ریاضی قطعات ساخته شده از الاستومرها نیز از این قاعده مستثنی نیست. تحلیل ریاضی این قطعات به دلیل رفتار بی‌نظیری که در برابر نیروهای وارد شده نشان می‌دهند، از پیچیدگی خاصی برخوردار است و حل معادله‌های حاصل تنها از راه روشهای عددی ممکن می‌شود. ویژگیهای مهمتر عبارت‌اند از: تراکم ناپذیری (*incompressibility*) و در نتیجه غیرخطی بودن رفتار تنش ــ کرنش و بروز تغییر شکلهای بزرگ در اثر اعمال بارهای کوچک. بنابراین تحلیل ریاضی قطعات لاستیکی در برابر نیروهای وارد شده بدون استفاده از تکنیکهای عددی ممکن نیست.

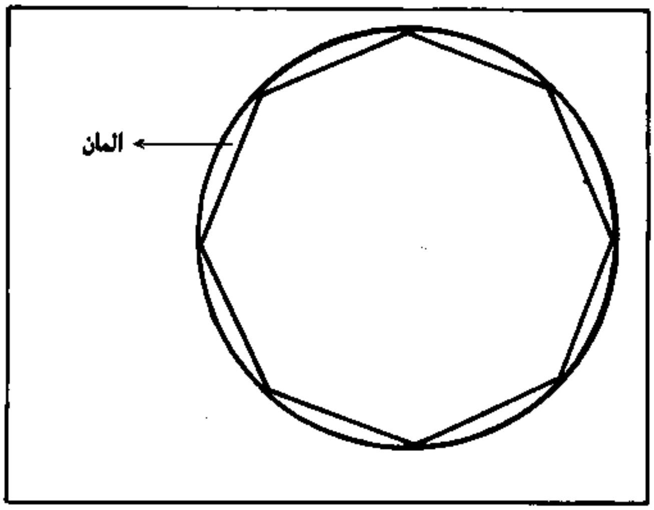
در میان روشهای عددی که برای حل معادله‌های دیفرانسیل وجود دارد، روش المانهای محدود (*finite elements methods*) امروزه از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. علت اصلی این است که روش یاد شده نه تنها نظیر سایر روشهای عددی (نظیر روش تفاضل محدود) تمام شرایط مرزی مختلف را منظور می‌دارد، بلکه برخلاف روشهای دیگر که تنها برای شکلهای هندسی ساده قابل اجرا می‌باشند، در این روش شکل هندسی اثری بر روند تحلیل ندارد. به عبارت دیگر، هرگاه روش المانهای محدود برای حل یک مسئله به کار گرفته شود، شکل هندسی مسئله اثری بر راه‌حل ندارد. در نتیجه مزیت عمده این روش نسبت به سایر روشها این است که بدون وارد شدن به جزئیات راه‌حل می‌توان از آن به راحتی استفاده کرد. از این‌رو، استفاده از آن حتی برای کسانی که با مسائل نظری آن آشنایی کافی ندارند به راحتی میسر است.

در این مقاله، نخست روش المانهای محدود معرفی می‌شود و سپس ویژگیهای تحلیل تنش در الاستومرها با استفاده از این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرانجام برای نشان دادن یکی از قابلیتهای این روش به تحلیل تنش ــ کرنش در یک قطعه لاستیکی صفحه‌ای شکل که زیر نیروی کششی قرار دارد، اشاره می‌شود و نتایج حاصل از آن ارائه می‌گردد.

مقدمه‌ای بر روش المانهای محدود

هدف اصلی در روش المانهای محدود نظیر سایر روشهای حل عددی، یافتن راه‌حل یک مسئله پیچیده توسط روشهای تقریبی است و به همین دلیل جواب حاصل همواره با جواب اصلی یا حقیقی اختلاف خواهد داشت.

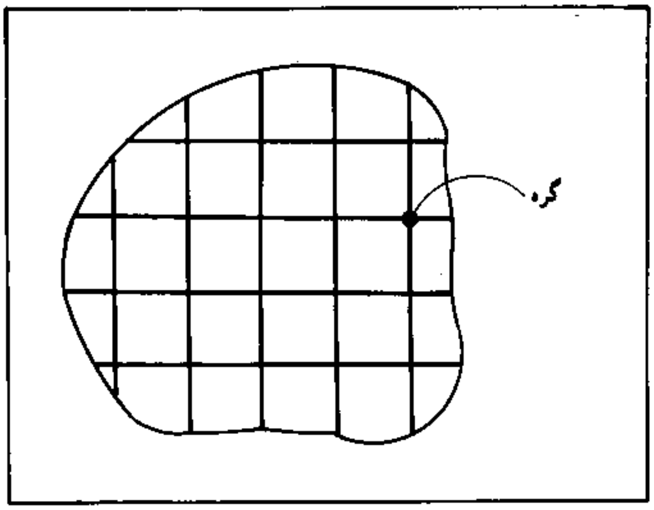
روشهای ریاضی موجود اغلب قادر به حل مسئله و یافتن جواب کامل (*exact solution*) آن نیست. گاهی حتی جواب تقریبی برای بسیاری از مسائل عملی وجود ندارد. از این رو، اغلب گرایش بسیاری به استفاده از روشهای عددی به ویژه روش المانهای محدود برای حل مسائل مهندسی وجود دارد. در این روش، دامنه مسئله به صورت ترکیبی از یک مجموعه زیر ناحیه (*sub-region*) که به یکدیگر متصل شده‌اند و المانهای محدود نام دارند، در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب، با حل مسئله در هر یک از این زیر ناحیه‌ها و ترکیب آنها با یکدیگر جواب برای ناحیه اصلی به دست می‌آید. اگر چه نام المانهای محدود در چند دهه اخیر مرسوم شده است، ولی اصول اولیه آن در چندین قرن پیش شکل گرفته است. شاید قدیمی‌ترین کاربرد این روش در هندسه باشد. بیش از دوهزار سال پیش ریاضیدانان در پی یافتن راه‌حلی برای تعیین محیط دایره بودند. امروزه، تعیین دقیق محیط یک دایره تنها توسط حساب دیفرانسیل ممکن است که فقط دویست سال از پیدایش آن می‌گذرد، در حالی که پیش از آن هندسه‌دانان با بهره‌گیری از روش المانهای محدود توانستند محیط دایره را با تقریبهای بسیار عالی تعیین کنند. آنها به جای محاسبه محیط دایره سعی کردند تا محیط یک چند ضلعی منظم را که به جای دایره در نظر گرفته بودند، به دست آورند. در چنین حالتی هر ضلع از چند ضلعی موردنظر به عنوان یک المان در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱). با بهره‌گیری از چنین تقریبی، ریاضیدانان موفق به تعیین محیط دایره با دقت بسیار بالا شدند. به عنوان مثال، یک سند قدیمی که بر روی پاپیروس نوشته شده است، حکایت از آن دارد که مصریان در ۱۵۰۰ سال پیش از میلاد عدد ۳/۱۶ را برای π به کار می‌بردند. بدیهی است که هر چقدر تعداد اضلاع چند ضلعی بیشتر باشد یا به عبارت دیگر تعداد المانهای بیشتری انتخاب شوند، محیط دایره با دقت بیشتری محاسبه می‌گردد و این یک اصل کلی در روش المانهای محدود است که هر چه تعداد المانها بیشتر باشد، جواب مسئله به جواب واقعی نزدیکتر است [1,2].



شکل ۱ ــ تقسیم‌بندی محیط یک دایره به المانهای محدود.

کاربرد روش المانهای محدود در حل مسائل هندسی به شیوه امروزی، نخستین بار توسط ترنر (*Turner*) و همکارانش در سال ۱۹۵۶ معرفی شد [1]. این پژوهشگران کاربرد یک روش ساده المانهای محدود را برای تحلیل تنش ــ کرنش در ساختمان هواپیما ارائه کردند. در واقع، عرضه موتورهای جت برای هواپیما در دهه ۴۰ باعث بروز دو انقلاب

عظیم در صنایع هواپیمایی گشت‌که یکی مربوط به روشهای تحلیل تنش ــ کرنش و دیگری در ارتباط با مواد مصرفی در ساختمان و بدنه اصلی هواپیما می‌باشد [1]. تا پیش از این تاریخ، کلیه هواپیماها با استفاده از موتورهای ملخ‌دار تولید می‌شدند و متخصصین دست‌اندرکار در مورد روشهای ریاضی تحلیل تنش مشکلی نداشتند. یعنی، با استفاده از روشهای محاسباتی موجود می‌توانستند به خوبی از عهده حل مسائل برآیند و محصولی با ضریب اطمینان بالا طراحی کنند. در زمینه مواد نیز آلومینیم به عنوان ماده‌ای سبک و مقاوم در ساخت بخش بزرگتری از بدنه وساختمان هواپیما به کار گرفته شد. ولی با دستیابی به سرعتهای بالا، تیتان نیز رفته رفته جایگزین آلومینیم در صنایع هواپیمایی گشت. از سوی دیگر، روشهای تحلیل سنتی نیز کارآیی نداشت و روش المانهای محدود جای پای خود را در تحلیل تنش ــ کرنش سازه‌ها باز کرد. تنها عیب عمده این روش آن است که باید دستگاه معادله‌های چند مجهولی با مقدار معادله‌های بسیار زیاد را حل کرد که این امر استفاده از ماشینهای محاسبه را ضروری می‌سازد. همزمان با پیشرفت تکنولوژی ساخت و عرضه کامپیوترهای قوی، روش المانهای محدود نیز پیشرفت شایانی کرد. با پیشرفت این روش، در اواسط دهه ۶۰ مشخص شد که روش المانهای محدود را علاوه بر جنبه سازه‌ای، می‌توان از دیدگاه ریاضی نیز مورد مطالعه قرار داد و بدین‌ترتیب این روش جای خود را در حل سایر مسائل مهندسی نظیر انتقال گرما و مکانیک سیالات نیز باز کرد [2].



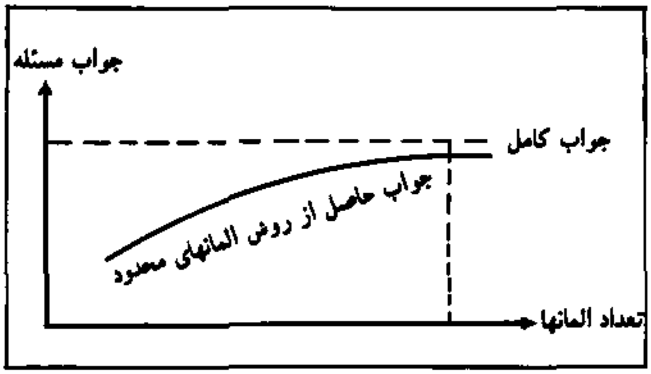
شکل ۲ ــ طرحی از یک محیط پیوسته المان‌بندی شده.

در روش المانهای محدود محیط پیوسته موردنظر به یک مجموعه المانهای کوچکتر که به نام المانهای محدود خوانده می‌شوند، تقسیم می‌گردد. این المانها به ترتیبی در نظر گرفته می‌شوند که در نقاط خاصی به نام گره (*node*) با یکدیگر اتصال داشته باشند (شکل ۲). هدف اصلی در حل یک مسئله تعیین مقادیر متغیر وابسته موردنظر، نظیر تغییر مکان (*displacement*) در داخل محیط پیوسته برحسب متغیرهای مستقل (طول، عرض، ارتفاع و زمان) می‌باشد. چون شیوه تغییر متغیر وابسته مشخص نیست، فرض می‌شود که بتوان تغییرات متغیر وابسته موردنظر را در داخل هر المان با یک تابع ساده تخمین زد. این توابع که به نام توابع درون‌یابی شده (*interpolated functions*) معروف‌اند، برحسب مقادیر متغیر وابسته در گرهها تعریف می‌شوند. وقتی معادله‌های محیط پیوسته برای تمام محیط نوشته شوند، در آن صورت مقادیر مجهول همان مقادیر متغیر وابسته در گرهها و شکل این معادله‌ها به صورت ماتریسی خواهد بود. با حل این معادله‌ها توسط روشهای حل ماتریسی مقادیر مجهولها، در واقع مقادیر متغیرهای وابسته در هر گره، به دست خواهد آمد. حل یک مسئله با استفاده از روش المانهای محدود را می‌توان به صورت یک فرایند مرحله به مرحله در نظر گرفت که مراحل آن عبارت‌اند از: تقسیم مسئله به المانهای محدود، انتخاب یک تابع تقریب مناسب، تعیین ماتریسهای سفتی هر المان و بردار بار وارد شده، سوار کردن (*assemblage*) ماتریسهای سفتی و بردار بار وارد شده برای تمام سیستم، حل معادله‌های کل مجموعه و تعیین مقادیر مجهول، محاسبه مقادیر تنش و کرنش که به ترتیب مورد بحث قرار می‌گیرند.

تقسیم مسئله به المانهای محدود

نخستین گام در حل یک مسئله با استفاده از روش المانهای محدود، تقسیم‌بندی محیط مورد نظر به یک مجموعه المان است. تعداد، اندازه، نوع و آرایش این المانها سهم بسزایی در دستیابی هرچه دقیقتر به جواب مسئله دارد. به عنوان یک اصل کلی، هرچه تعداد این المانها بیشتر باشد، جواب حاصل دقیقتر خواهد بود. به هر حال، حدی وجود دارد که بیشتر از آن حد کوچک‌سازی المانها یا افزایش تعداد آنها نقشی در افزایش دقت جوابها نخواهد داشت، این مطلب در شکل ۳ نشان داده شده است. باید توجه داشت که با افزایش تعداد المانها بر زمان مورد نیاز برای حل مسئله افزوده می‌شود. بنابراین انتخاب مناسب و بهینه از تعداد المانها ضرورت تام دارد. نوع المان انتخاب شده نیز در دستیابی به جواب مناسب مؤثر است. المان انتخابی باید با نوع تحلیل مورد نظر همخوانی داشته باشد. به عنوان مثال، برای تحلیل تنش در یک صفحه استفاده از یک المان دوبعدی ضرورت دارد، درحالی که برای تحلیل یک جسم سه بعدی باید از یک المان سه بعدی بهره جست. صرف‌نظر از بعد، شکل المان نیز مؤثر است. به عنوان مثال برای حالت دو بعدی، شکلهای مختلفی از المان وجود دارد که در شکل ۴ چند نمونه از آنها نشان داده شده است.

آرایش المانها نیز اهمیت ویژه‌ای دارد. برای مثال، برای تعیین توزیع تنش در یک صفحه که در وسط آن یک سوراخ وجود دارد، روشن است که شیوهٔ آرایش باید به گونه‌ای باشد که در حوالی سوراخ به علت وجود پدیده تمرکز تنش، اندازه المانها کوچکتر و در سایر نواحی اندازه المانها بزرگتر باشد.



شکل ۳ ــ اثر تعداد المانها بر جواب مسئله [2].

انتخاب یک تابع تقریب مناسب

گام بعدی، انتخاب یک تابع مناسب برای تعیین مقادیر متغیر وابسته مورد نظر است. تابع انتخابی باید دارای دو ویژگی اساسی باشد. اول آنکه با تقریب بسیار خوبی بیانگر رفتار متغیر مورد نظر باشد و دوم اینکه شکل آن تا حد ممکن ساده باشد، به‌طوری که از نقطه نظر مسائل محاسباتی اشکال ایجاد نکند. عموماً، از چند جمله‌ایها به عنوان توابع مختلف تقریب استفاده می‌کنند.

تعیین ماتریسهای سفتی هر المان و بردارِبار وارد شده

با استفاده از مدل انتخاب شده برای متغیر وابسته یاد شده در بخش قبلی و نیز نوشتن معادله‌های تعادلی، ماتریس سفتی (*Stiffness matrix*)، $[K^{(e)}]$ و بردار بار $\vec{P}^{(e)}$ برای هر المان به دست خواهد آمد. به طور کلی رابطه زیر برای هر المان برقرار است *[2]*:

$$[K^{(e)}]\phi^{(e)} = \vec{P}^{(e)} \qquad (۱)$$

که $\phi^{(e)}$ بردار مقادیر مجهول در هرالمان است.

سوار کردن ماتریسهای سفتی و بردار بار وارد شده برای تمام سیستم

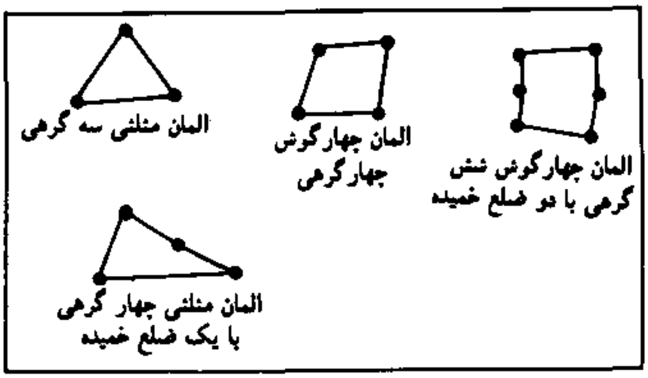
ازآنجاکه‌فرض‌شده است ساختار مورد نظر از یک مجموعه المانهای کوچکتر تشکیل شود، بنابراین سوارکردن کلیه ماتریسهای سفتی و بردارهای بار وارد شده ضرورت پیدا می‌کند تا معادله تعادلی کل سیستم به صورت زیر به دست آید *[2]*:

$$[K]\ \phi = \vec{P} \qquad (۲)$$

که $[K]$، ϕ و $\vec{P}$ به ترتیب ماتریسهای سفتی، بردار مقادیر مجهول و بردار بار وارد شده برای تمام مجموعه است.

حل معادله کل مجموعه و تعیین مقادیر مجهول

در این مرحله، با اعمال شرایط مرزی به معادله‌های تعادلی و استفاده از روش حل دستگاه معادله‌های چند مجهولی (نظیر روش حذفی گوس) مقادیر بردار ϕ یا بردار مقادیر مجهول (تغییر مکانهای هر گره) به دست می‌آید.



شکل ۴ ــ نمونه‌هایی از شکلهای مختلف المان دوبعدی.

محاسبه مقادیر تنش و کرنش

با مشخص شدن مقادیر مجهول یا درواقع تغییر مکانها و با دردست داشتن تابع تقریب می‌توان مقادیر تنش و کرنش را در هر المان به دست آورد.

ویژگی عمده این روش آن است که کلیه مراحل آن را می‌توان در قالب یک الگوریتم درآورد و با تبدیل آن به یک برنامه کامپیوتری، بسته نرم‌افزاری تهیه کرد. امروزه بسته‌های نرم‌افزاری فراوانی وجود دارد که در آنها با استفاده از روش المانهای محدود به حل مسائل مهندسی پرداخته شده است. این بسته‌های نرم‌افزاری اغلب گران قیمت‌اند و حجم خطوط برنامه‌های آنها از چندین هزار تجاوز می‌کند. به عنوان مثال، برنامه مفصل و معروف آدینا* دارای ۱۵۰۰۰۰ خط برنامه به زبان فورترن ۷۷ می‌باشد. سایر برنامه‌های تجاری نیز اغلب از حجمی بالا و در همین حد برخوردارند. در جدول ۱ چندین نرم‌افزار تجاری مشهور که توسط روش المانهای محدود به تجزیه و تحلیل مسائل می‌پردازد، معرفی شده است *[3]*. با توجه به این جدول ملاحظه می‌شود که زمینه‌کاری این برنامه‌ها متناوب است. برخی از آنها تنها برای حل مسائل تحلیل تنش ــ کرنش نوشته شده‌اند و بعضی محدوده وسیعتری دارند و به بررسی مسائل انتقال گرما و مکانیک سیالات نیز می‌پردازند. در هر صورت این برنامه‌ها به نوعی تنظیم و عرضه می‌شوند که می‌توان تنها بخش مورد نیاز را تهیه کرد.

اطلاعات ورودی مورد نیاز برنامه‌های تجاری المانهای محدود، اغلب به پنج گروه مختلف تقسیم می‌شوند که عبارت‌اند از: اطلاعات کلی، اطلاعات مربوط به گرهها، اطلاعات مربوط به المانها، اطلاعات مربوط به مواد، اطلاعات مربوط به بارگذاری که به ترتیب مورد بحث قرار می‌گیرند.

ADINA = Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis

جدول ۱ ـ ویژگیهای نرم‌افزارهای مشهور روش المانهای محدود [3].

ردیف	نام برنامه	تحلیل خطی				تحلیل غیرخطی				شرکت عرضه‌کننده	نوع سخت‌افزار قابل نصب			
		ایستا	پویا	انتقال گرما	مکانیک سیالات	ایستا	پویا	انتقال گرما	مکانیک سیالات		PC	ایستگاههای کار	مینی (mini) مین (main)	ابر کامپیوتر
۱	ADINA	X	X	X	X	X	X	X	X	Adina R & D inc.	X	X	X	X
۲	ALGOR	X	X	X	X	X	X	X		Algor Interactive Systems Inc.	X	X		
۳	GIFTS	X	X	X						Casa / Gifts Inc.	X			
۴	IMAGES 2D & 3D	X	X	X						Celestial Software Inc.	X	X	X	
۵	STRIM ۱۰۰	X	X	X	X	X		X		Cisigraph Corp.		X	X	
۶	BEASY	X		X	X		X			Computational Mechanics	X	X	X	X
۷	SAP ۹۰	X	X	X				X		Computers & Structures	X			
۸	ETABS	X	X							Computers & Structures	X			
۹	SAFE	X								Computers & Structures	X			
۱۰	THERMALAB			X						Computervision		X		
۱۱	STRESS LAB	X	X							Computervision		X		
۱۲	QUICK FRAME/ QUICK BEAM	X	X	X						Engineering Software	X			
۱۳	AFEMS	X	X	X	X	X	X	X	X	FEM Engineering	X	X		
۱۴	ELM ANALYSIS	X								Fujitsu America	X			
۱۵	ABAQUS	X	X	X		X	X	X		Hibbet , karlsson & Sorenson Inc.		X	X	X
۱۶	I/FEM – P	X	X							Intergraph Corp		X		
۱۷	MSC/NASTRAN	X	X	X	X	X	X	X		Mac Neal – Schwendler Corp.	X	X	X	X
۱۸	MARC	X	X	X		X	X	X		Marc Analysis Research Corp.		X	X	X
۱۹	MARC/Linear	X	X	X						Marc Analysis Research Corp.		X		
۲۰	INERTIAES	X	X	X						Modern Computer Aided Engineering	X	X		
۲۱	NISA II	X	X	X	X	X		X	X	Engineering Mechanics Research Corp.	X	X	X	X
۲۲	P/FEA	X	X	X		X				PDA – Engineering		X	X	X
۲۳	P/Composite	X				X				PDA – Engineering		X	X	X
۲۴	P/Thermal		X							PDA – Engineering		X	X	X
۲۵	P/Concept Analysis	X	X							PDA – Engineering		X		
۲۶	P/Fatigue	تحلیل خطی و غیرخطی خستگی و دوام								PDA – Engineering		X	X	
۲۷	Mechanics Applied Structures	X	X							Rasna Corp.	X	X		
۲۸	I – DEAS	X	X	X	X	X	X	X	X	SDRC		X		
۲۹	COSMOS/M	X	X	X	X	X	X	X	X	SRAC	X	X	X	
۳۰	ANSYS	X	X	X	X	X	X	X	X	Swanson Analysis Systems Inc.	X	X	X	X

اطلاعات کلی

در این قسمت اطلاعات کلی مربوط به تحلیل، نظیر ایستایی یا پویایی، خطی یا غیرخطی بودن، تعداد گرهها و... به برنامه داده می‌شود.

اطلاعات مربوط به گرهها

همان گونه که قبلاً اشاره شد، نخستین گام در کاربرد این روش تقسیم‌بندی جسم مورد نظر به یک مجموعه شبکه‌های کوچکتر است. بعد از اینکه جسم مورد نظر شبکه‌بندی گردید، باید تمام گرهها شماره‌گذاری شود و سپس همراه با مختصات هریک از نقاط و شرایط مرزی به برنامه داده شود.

اطلاعات مربوط به المانها

در مرحله سوم، باید المانها شماره‌گذاری شود و شیوه اتصال گرهها به هر المان به برنامه وارد گردد. به عبارت دیگر باید مشخص شود که به فرض المان شماره m به چه گرههایی متصل است.

اطلاعات مربوط به مواد

مجموعه دیگر اطلاعات، خواص مواد است که در این مجموعه باید مشخصات فیزیکی هر یک از المانها برای برنامه تعریف شود. به عنوان مثال، چنانچه مدل انتخابی کشسان خطی باشد، در آن صورت لازم است تا برای هر المان مقادیر مدول کشسانی و نسبت پوآسون مشخص گردد.

اطلاعات مربوط به بارگذاری:

آخرین دسته اطلاعات مورد نیاز، اطلاعات مربوط به بارگذاری است. در این مرحله باید به برنامه اعلام شود که چه نوع باری (متمرکز ، گسترده، گرمایی و...) و به چه گرهها یاالمانهایی از جسم وارد می‌شود.

با پایان گرفتن اطلاعات ورودی مورد نیاز، برنامه مسئله را حل می‌کند و مقادیر خروجی را عرضه می‌دارد. تعداد خروجیها در برنامه المانهای محدود اغلب زیادند. یکی دیگر از ویژگیهای برنامه‌های تجاری مجهز بودن آنها به برنامه‌های پیش‌پردازنده *(Pre-Processing)* و پس‌پردازنده *(Post-Processing)* است. برنامه‌های پیش‌پردازنده برای تهیه اطلاعات ورودی نوشته شده‌اند. این برنامه‌ها قادرند تا تنها با دادن شکل هندسی جسم مورد نظر، عمل شبکه‌بندی را انجام دهند و مختصات و اطلاعات مربوط به المانها را مشخص کنند و از این‌رو، به طور قابل‌توجهی از حجم کارهایی که توسط تحلیل‌گر باید صورت گیرد، می‌کاهند. برنامه‌های پس‌پردازنده نیز برای پردازش اطلاعات خروجی نوشته شده‌اند. این برنامه‌ها اطلاعات خروجی را می‌گیرند و آنها را به صورت نمودار و شکلهای مختلف عرضه می‌دارند.

تحلیل تنش ــ کرنش در الاستومرها

تحلیل تنش ــ کرنش در الاستومرها با استفاده از روش المانهای محدود دارای ویژگی خاص و مهمی است که آن را از تحلیل تنش ــ کرنش در مواد معمولی متمایز می‌سازد. این ویژگی خاص، غیرخطی بودن رفتار الاستومرها در قبال نیروهای وارد شده است. معادله ۲ که معادله کلی حاصل در روش المانهای محدود می‌باشد، تنها بیانگر رفتار خطی است، زیرا تغییر مکان Φ تنها تابعی خطی از بار اعمال شده $\vec{P}$ است. به عبارت دیگر، چنانچه بار اعمال شده از P به αP تغییر کند (α پارامتری ثابت است)، در آن صورت تغییر مکان از ϕ به $\alpha\phi$ خواهد بود. حال چنانچه این معادله صادق نباشد، مسئله از حالت خطی خارج و غیرخطی می‌شود. معادله‌های تعادلی که برای تعیین ماتریس سفتی هر المان و در نهایت ماتریس سفتی کل سیستم مورد نیازند، روی المان تغییر شکل نیافته نوشته می‌شوند. در حالی که، در عمل باید این معادله‌ها روی حالت تغییر شکل‌یافته نوشته شوند. فرض صادق بودن معادله‌های تعادلی برای حالت تغییر شکل‌نیافته زمانی صحیح است که سه شرط برقرار باشد*[4]*: ۱) رفتار تنش ــ کرنش جسم خطی باشد، ۲) تغییر شکلهای ایجاد شده کوچک باشد و ۳) شرایط مرزی در طول بارگذاری تغییر نکند. زمانی که هر یک از این سه شرط برقرار نباشد، مسئله از حالت خطی خارج می‌شود. در چنین مواردی عمل محاسبه باید به صورت مرحله‌ای صورت گیرد. بدین ترتیب که با تقسیم کردن بار وارد شده به چندین بار کوچکتر، مسئله در هر مرحله به صورت تکرار شونده *(iterative)* حل شود تا جوابها به حالت همگرایی *(Convergence)* برسند. پدیده غیرخطی بودن رفتار تنش ــ کرنش، اصطلاحاً غیرخطی بودن ماده *(material nonlinearity)* و پدیده بروز تغییرشکلهای بزرگ یا تغییر کردن شرایط مرزی به نام غیرخطی بودن هندسی *(geometrical nonlinearity)* خوانده می‌شود. زمانی که یک قطعه لاستیکی زیر تنش قرار می‌گیرد، هر دو پدیده غیرخطی بودن ماده و غیرخطی بودن هندسی در آن وجود دارد که پدیده غیرخطی بودن هندسی ناشی از تغییر شکلهای بزرگ همواره وجود داشته ولی تغییر کردن شرایط مرزی بسته به حالت مورد نظر می‌تواند موجود باشد یا نباشد. معادله‌های بسیاری برای توجیه رفتار غیرخطی تنش ــ کرنش الاستومرها گزارش شده‌اند که در همگی آنها بر جنبه تراکم‌ناپذیری تاکید می‌شود. از جمله آنها، می‌توان به معادله‌های مونی ــ ریولین *(Mooney-rivlin)*، اگدن *(Ogden)*، پنگ *(Peng)* و پنگ ــ لاندل *(Peng-landel)* اشاره کرد*[5]*. معروفترین این معادله‌ها، معادله مونی ــ ریولین است که در این مقاله بحث می‌شود و شکل زیر را دارد:

$$U = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \qquad (۳)$$

در این معادله C_1 و C_2 پارامترهای ثابت، I_1 و I_2 نامتغیرهای *(invariants)* تانسور اصلی کرنش و U تابع انرژی کرنش *(strain energy function)*

می‌باشد. شکل ساده شدهٔ این معادله برای حالت یک‌بعدی کششی به ترتیب زیر است:

$$\sigma = 2\,(a - a^{-2})\,(C_1 + C_2 a^{-1}) \qquad (۴)$$

که σ تنش کوشی (*cauchy stress*) یا نیرو به ازای واحد سطح مقطع اولیه نمونه و a نسبت‌کشش ($dl/l + 1$) می‌باشد. بنابراین، برای‌تعیین‌مقادیر ثابت C_1 و C_2 باید با انجام یک آزمون ساده کشش (نظیر **ASTM - D ۴۱۲**) نمودار $\frac{\sigma}{2\,(a - a^{-2})}$ را در مقابل a^{-1} رسم کرد. در صورت پیروی رفتار نمونه مورد نظر از معادله مونی ــ ریولین، یک خط راست حاصل خواهد شد که شیب آن برابر C_2 و عرض از مبدأ آن برابر C_1 می‌باشد.

برای درنظر گرفتن پدیده غیرخطی بودن هندسی ناشی از تغییر شکلهای بزرگ، عموماً تعریف کاملتری از کرنش را به جای تعریف معمولی کرنش به کار می‌برند. این تعریف کاملتر به نام کرنش لاگرانژی (*lagrangian strain*) خوانده و به صورت زیر نوشته می‌شود [6]:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^1\right]$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$e_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\,\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$e_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}$$

تعریف معمولی کرنش که برای تغییر شکلهای کوچک صادق است، تنها دارای جمله‌هایی از معادله‌های بالاست که زیر آنها خط کشیده شده است و از جمله‌های دیگر به علت ناچیز بودن صرف‌نظر می‌شود. ولی، برای تغییر شکلهای بزرگ باید سایر جمله‌های معادله‌های بالا را در نظر داشت. تحلیل دقیق و جامع تنش برای قطعات لاستیکی زمانی امکان‌پذیر است که دو پدیده غیرخطی بودن ماده و غیرخطی بودن هندسی با هم درنظر گرفته شوند.

نتایج و بحث

اجرای نمونه برنامه المانهای محدود

برای به کارگیری و آگاهی از قابلیتهای این روش، عمل تحلیل تنش برای یک قطعه لاستیکی با استفاده از نرم‌افزار آدینا صورت گرفت. در حال حاضر آدینا تنها برنامه روش المانهای محدود در ایران است که برای تحلیل قطعات لاستیکی مناسب به شمار می‌آید. این برنامه دارای قابلیتهای ویژه‌ای است که می‌تواند دو پدیده غیرخطی بودن ماده و غیرخطی بودن هندسی را به طور همزمان حین تحلیل درنظر بگیرد. مدل رفتاری تنش ــ کرنش انتخاب شده، مدل مونی ــ ریولین است که ضریبهای C_1 و C_2 آن به ترتیب عبارت‌اند از [5]:

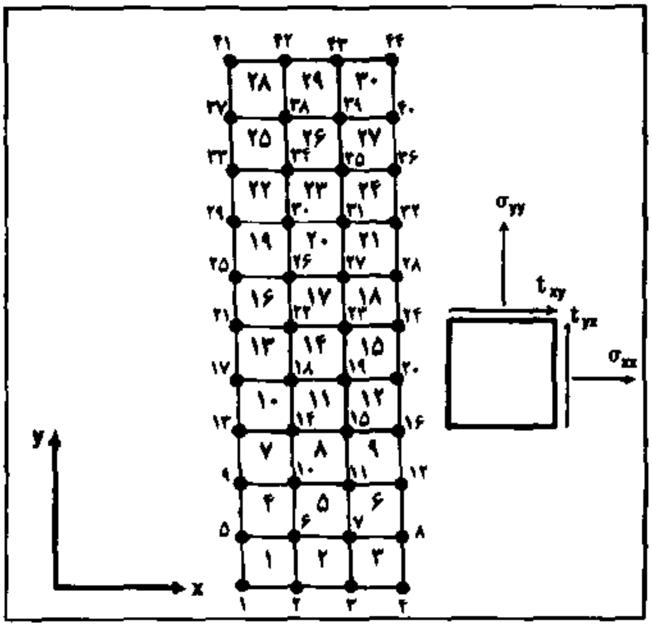
$$C_1 = ۱۱/۵۱۱۸\ N/cm^2 \qquad C_2 = ۱۰/۱۳۴۵\ N/cm^2$$

قطعه لاستیکی مورد بحث به صورت یک صفحه است که طول، عرض و ضخامت آن به ترتیب ۱۰cm، ۳cm و ۰/۲۵ cm می‌باشد. شکل ۵ قطعه شبکه‌بندی شده را نشان می‌دهد. نوع تحلیل مورد نظر دو بعدی و در حالت تنش صفحه‌ای (*plane stress*) می‌باشد. بار وارد شده بر این قطعه برابر ۲۴۰ نیوتن است که به دلیل ماهیت غیرخطی مسئله به شش مرحله مساوی تقسیم شده است. این بار بر گرههای ۱ تا ۴ اعمال می‌شود. شرایط مرزی مسئله بدین صورت است که گرههای ۴۱ تا ۴۴ همگی بسته‌اند، یعنی هیچ‌گونه تغییر مکانی ندارند و گرههای ۱ تا ۴ تنها در جهت y حرکت دارند و در جهت y بسته می‌باشند. شکل ۶، قطعه مورد بحث همراه با بار وارد شده بر آن را نشان می‌دهد. نتایج حاصل از این تحلیل در شکلهای ۷ تا ۱۳ نشان داده شده است. در شکل ۷، نمودار متوسط تغییر مکان گرههای ۱ تا ۴ در جهت y نشان داده شده است که در حقیقت بیانگر افزایش طول نمونه می‌باشد. در شکل ۸ نمودار تغییر مکان عرضی نمونه که مربوط به گرههای ۲۱ و ۲۴ است، نشان داده شده است. نمودار اخیر بیان‌کننده مجموع قدر مطلق تغییر مکان گرههای ۲۱ و ۲۴ می‌باشد، زیرا تغییر مکان گره ۲۱ و ۲۴ قرینه یکدیگر است. هر دو نمودار تغییر مکان، بیانگر رفتار غیر خطی نمونه زیر بار اعمال شده است. در شکلهای ۹ تا ۱۱ تنشهای عمودی (*normal*) و برشی در هر المان نشان داده شده‌اند. قابل توجه است که مقادیر تنش در هر المان در نقاط خاصی محاسبه می‌شود که به نام نقاط انتگرال‌گیری (*integration points*) معروف است. تعداد نقاط انتگرال‌گیری برای تحلیل مورد نظر ۳×۳ است که مقادیر تنش نشان داده شده در نمودارهای بالا مربوط به وسط هر المان می‌باشد. همان‌گونه که انتظار می‌رود به دلیل متقارن بودن نمونه از لحاظ هندسی و بارگذاری، مقادیر تنش در المانهای ۱ و ۳، ۵ و ۸ و... با یکدیگر مساوی‌اند که این نکته به خوبی در نمودارهای بالا مشاهده می‌شود.

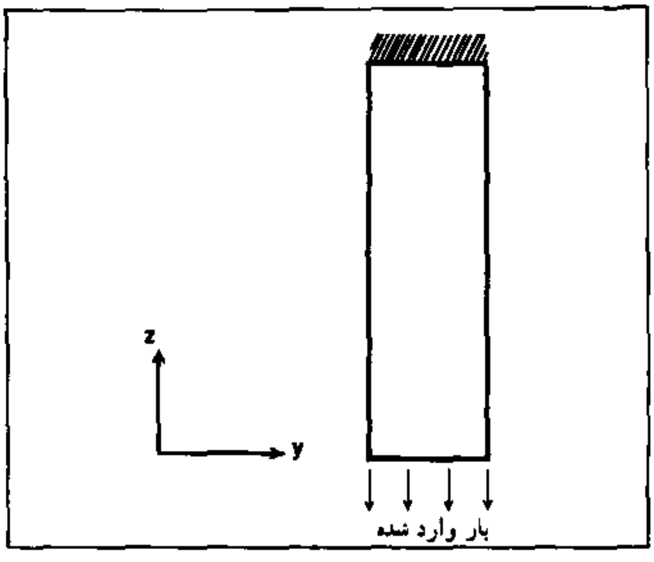
در شکل ۹ نمودار توزیع تنش عمودی σ_{xx} که در جهت x می‌باشد، نشان داده شده است. منحنیهای مختلف موجود در هر نمودار بیانگر هر مرحله از بارگذاری می‌باشند. ملاحظه می‌شود که توزیع تنش در قسمت ابتدایی و انتهایی نمونه مقادیر بالایی را نشان می‌دهد، در حالی که در قسمتهای وسط نمونه توزیع، حالت یکنواختی دارد و مقدار آن مستقل از

بار وارد شده و برابر صفر است. در شکل ۱۰ نمودار توزیع تنش عمودی σ_{yy} که در جهت y می‌باشد، نشان داده شده است. نظیر حالت قبل، توزیع تنش در دو انتها از حالت یکنواخت خارج می‌شود، در حالی که قسمتهای وسط حالت یکنواخت خود را حفظ می‌کنند. برخلاف σ_{xx}، توزیع تنش در قسمتهای وسط علی‌رغم یکنواخت بودن مقدار ثابتی ندارد و با ازدیاد بار وارد شده، افزایش می‌یابد. در شکل ۱۱ نمودار توزیع تنش برشی τ_{xy} نشان داده شده است. به علت تقارن هندسی و بارگذاری، مقدار تنش برشی در المانهای وسطی یعنی ۲، ۵، ۸ و... برابر صفر می‌باشد.

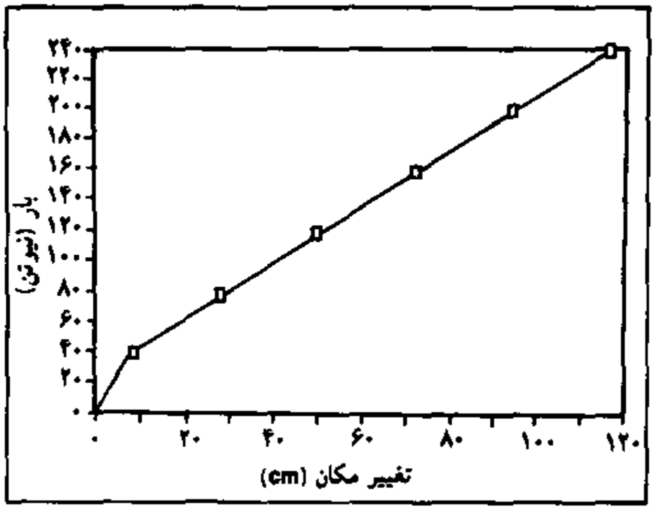
شکلهای ۱۲ و ۱۳ توزیع تنشهای اصلی σ_{p_+} و σ_{p_-} را نشان می‌دهد که σ_{p_+} تنش اصلی ماکسیمم و σ_{p_-} تنش اصلی مینیمم است.



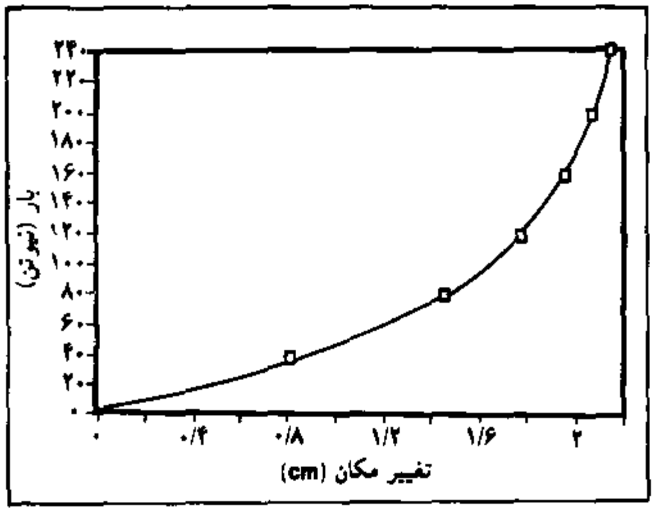
شکل ۵ ــ شکل شبکه‌بندی شده قطعه لاستیکی.



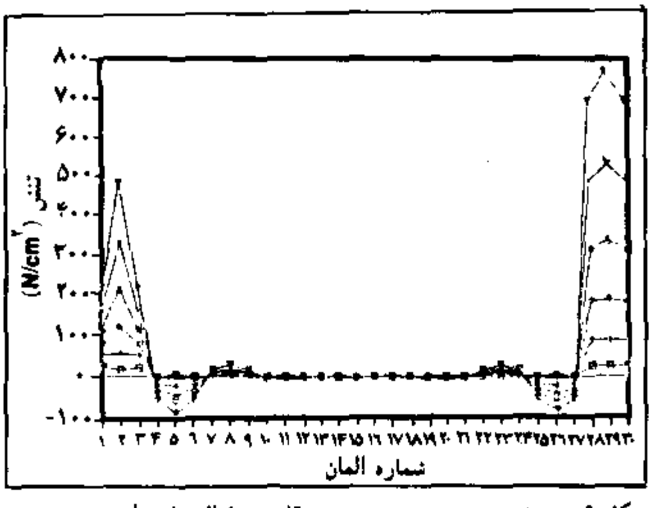
شکل ۶ ــ قطعه لاستیکی همراه بار وارد شده بر آن.



شکل ۷ ــ نمودار تغییر مکان گرههای ۱ تا ۴ در جهت z.

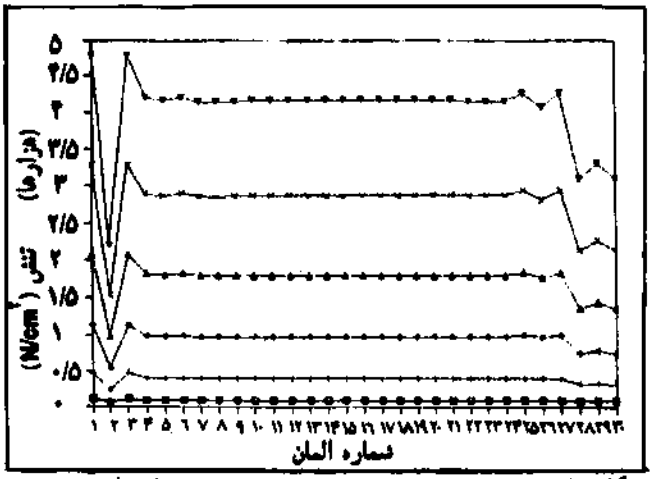


شکل ۸ ــ تغییر مکان عرضی نمونه.



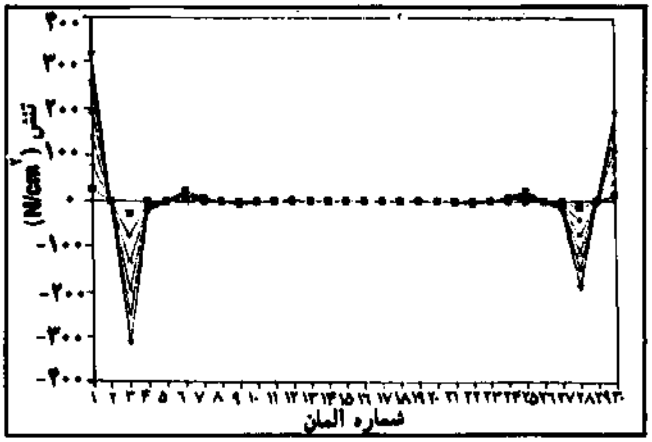
شکل ۹ ــ توزیع تنش عمودی σ_{xx} در مقادیر مختلف بار وارد شده.

□ ۴۰　+ ۸۰　◇ ۱۲۰　▲ ۱۶۰　× ۲۰۰　▿ ۲۴۰



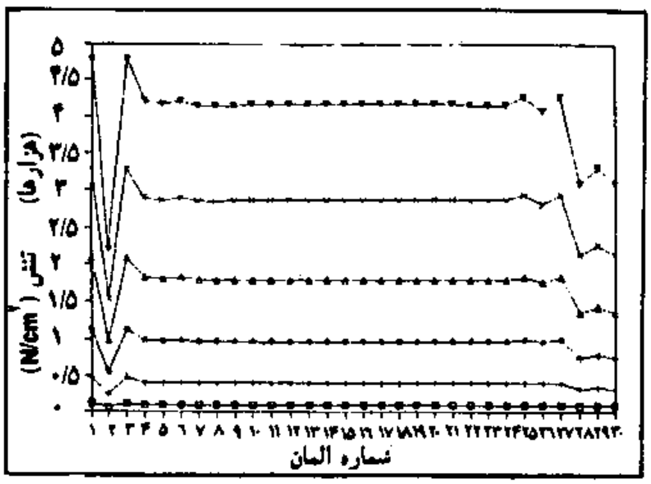
شکل ۱۰ ـ توزیع تنش عمودی σ_{yy} در مقادیر مختلف بار وارد شده

□ ۴۰ + ۸۰ ◇ ۱۲۰ ▲۱۶۰ × ۲۰۰ •۲۴۰



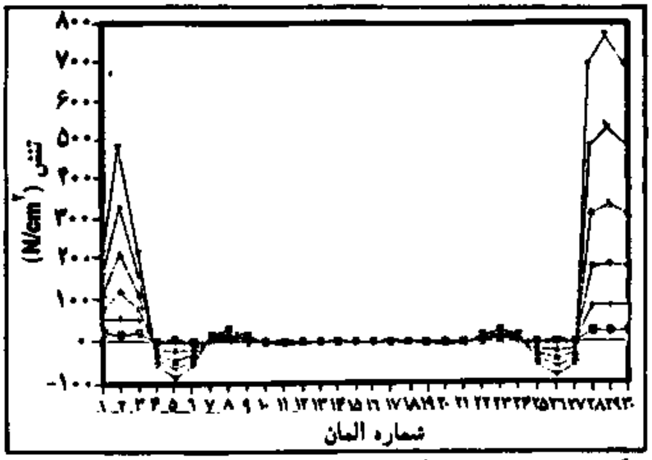
شکل ۱۱ ـ توزیع تنش برشی τ_{xy} در مقادیر بار وارد شده

□ ۴۰ + ۸۰ ◇ ۱۲۰ ▲۱۶۰ × ۲۰۰ •۲۴۰



شکل ۱۲ ـ توزیع تنش اصلی σ_{p} در مقادیر مختلف بار وارد شده.

□ ۴۰ + ۸۰ ◇ ۱۲۰ ▲۱۶۰ × ۲۰۰ •۲۴۰



شکل ۱۳ ـ توزیع تنش اصلی σ_{p} در مقادیر مختلف بار وارد شده.

□ ۴۰ + ۸۰ ◇ ۱۲۰ ▲۱۶۰ × ۲۰۰ •۲۴۰

نتیجه‌گیری

تحلیل تنش در قطعات لاستیکی به دلیل وجود دو پدیده مختلف غیر خطی بودن ماده و غیر خطی بودن هندسی از پیچیدگی خاصی برخوردار است که استفاده از روشهای محاسباتی عددی را اجتناب‌ناپذیر می‌سازد. در این میان، روش المانهای محدود نه تنها به دلیل مستقل بودن راه‌حل از شکل هندسی مسئله بلکه به علت قابلیت در نظر گرفتن دو پدیده غیر خطی یاد شده اهمیت ویژه‌ای دارد. در این مقاله ضمن معرفی روش المانهای محدود و بررسی ویژگیهای تحلیل تنش در قطعات لاستیکی، نمونه‌ای از عمل تحلیل تنش در یک قطعه لاستیکی ارائه شد. ملاحظه می‌شود که تحلیل تنش در یک قطعه لاستیکی اطلاعات با ارزشی از چگونگی توزیع تنش (کششی، برشی و اصلی) و همچنین شکل تغییر یافته نمونه به دست می‌دهد که با توجه به آنها نقطه‌ضعفهای طرح مشخص و اصلاح می‌شوند.

قدردانی

از شرکت مهندسی و تحقیقات صنایع لاستیک که با در اختیار قرار دادن برنامه آدینا امکان انجام محاسبات این مقاله را فراهم ساخت، صمیمانه قدردانی می‌شود.

REFERENCES

[1] G.Y.A Gordon, Stabilization of Synthetic High Polymers, GNPI Moscow, 1963.

[2] W. Lincoln Hawkins, Polymer Stabilization, Wiley Interscience, 1971.

[3] G.Scott, In Plastic Forming, ED J.P.Beadle, Mac Millan Press, 161, 1971.

[4] D.C. Meller, A.B. Moir and G.Scott, Europe Poly J. 9, 219, 1973.

[5] Calver and Pitts, Photo chemistry, Ed. John Wiley and Sons, Chapters 3 and 4, 1966.

[6] G. Scott, Atmospheric Oxidation and Antioxidants, Elsevier Amsterdam, 1955.

[7] W.L. Hawkins, Oxidative Degradation of High Polymers, Elsevier, New York, 164, 1954.

[8] B.S. Biggs, Polymer Degradation Mechanism, MBS Ciro, 528, 1961.

[9] G.H. Hartoly and J.E. Guillet, Macromolecules, pp 1–165, 413, 1968.

[10] Dan Gilead, A Controllable – Photo – Degradable Polyetheylene Film for Agriculture, Society of Plastic Engineers, 35th Annual Technical Conference, Queen Elizabeth Hotel, Montreal, Canada, April 25–28, 1977.

[11] P.L.W.Crawley, J.S.Elliot and P.W. Gossling, British Patent, 79, 393, 8, 3, Chem. Abstract, 52, 21051, 1958.