

Mechanical Behavior of Filled Rubber Compounds: Hyper-Elastic Models Based on Strain Amplification

Mir Hamid Reza Ghoreishy*, Foroud Abbassi Sourki

Department of Rubber Processing and Engineering, Faculty of Processing, Iran Polymer and Petrochemical Institute, P.O. Box: 14975-112, Tehran, Iran

Received: 9 June 2024, accepted: 16 October 2024

ABSTRACT

Hypothesis: The hyperelastic behavior of the rubber compounds filled with reinforcing fillers (carbon black) is dependent on the filler content. The previous theories for the prediction of the mechanical behavior of these materials are based on phenomenological relationships. In this research, a new approach based on the amplified strain theory is presented and its reliability and applicability are examined for a rubber compound reinforced with different carbon black contents.

Methods: Six rubber compounds based on SBR reinforced with different carbon black contents (20, 30, 40, 50, and 60 phr) as well as the neat compound were prepared. The mechanical behavior of these compounds under uniaxial tension mode, volumetric changes, compression, and simple shear modes were experimentally determined. The Yeoh material model was selected for the neat compound and material constants were calibrated using the uniaxial and volumetric changes data. Two strain amplification relationships were selected including the Bergstrom-Boyce and our newly proposed models. The parameters of the latter model were determined using an optimization algorithm in which a new UHYPER subroutine was developed and linked to Abaqus main code. To assess the proposed model and comparing it with the Bergstrom-Boyce model the simulation results obtained from the finite element model of the uniaxial, compression, and simple shear tests were compared with their corresponding experimental data.

Findings: The results showed that hyperelastic behaviors of the filled rubber compounds, predicted by our developed strain amplified model, are more accurate than those obtained by the Bergstrom-Boyce equation. It is also found that the combination of the Yeoh hyperelastic model with our proposed relationship can precisely predict the mechanical behavior under different modes of loadings.

Keywords:

rubber,
mechanical behavior,
filler,
strain amplification,
finite element method

(*To whom correspondence should be addressed.

E-mail: M.H.R.Ghoreishy@ippi.ac.ir

Please cite this article using:

Ghoreishy M.H.R., Abbassi Sourki F., Mechanical Behavior of Filled Rubber Compounds: Hyper-Elastic Models Based on Strain Amplification, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **37**, 169-180, 2024.

رفتار مکانیکی آمیزه‌های لاستیکی پر شده با دوده: مدل‌های ابرکشسان توسعه یافته بر پایه تشدید کرنش

میر حمیدرضا قریشی*، فرود عباسی سورکی

تهران، پژوهشگاه پلیمر و پتروشیمی ایران، پژوهشکده فرایند پلیمرها، گروه لاستیک،

صندوق پستی ۱۱۲-۱۴۹۷۵

دریافت: ۱۴۰۳/۳/۲۰، پذیرش: ۱۴۰۳/۷/۲۵

چکیده

فرضیه: رفتار ابرکشسان آمیزه‌های لاستیکی پر شده با پرکننده‌های تقویتی (دوده) به مقدار پرکننده وابسته است. نظریه‌های پیشین، بر اساس ارائه روابط پدیده‌شناسی برای پیش‌بینی این رفتار هستند. در این پژوهش، با رویکردی نو بر پایه نظریه تشدید کرنش، معادله‌های پیشین بسط و توسعه یافته و عملکرد آن‌ها برای پیش‌بینی رفتار آمیزه لاستیکی سنجش شده است.

روش‌ها: شش آمیزه لاستیکی بر پایه کائوچوی SBR تقویت شده با مقدارهای مختلف دوده (۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ قسمت دوده) به همراه آمیزه خالص بدون پرکننده تهیه شدند. رفتار مکانیکی این نمونه‌ها در حالت‌های کششی تک‌محوری، فشاری، برشی ساده همراه با تغییرات حجمی با آزمون‌های تجربی تعیین شد. از مدل مکانیکی Yeoh برای بیان رفتار ابرکشسان آمیزه خالص استفاده شد که پارامترهای آن به کمک برازش داده‌های آزمون کشش تک‌محوری و تغییرات حجمی به دست آمدند. دو مدل تشدید کرنش ارائه شده توسط Bergstrom و Boyce و مدل پیشنهادی در این پژوهش در نظر گرفته شدند. پارامترهای مدل پیشنهادی به کمک الگوریتم کمینه‌سازی به همراه زیربرنامه اختصاصی به دست آمدند که برای اولین بار در این پژوهش تهیه شده بود. برای سنجش عملکرد مدل پیشنهادی و مقایسه آن با مدل Bergstrom و Boyce از این مدل‌ها برای شبیه‌سازی سه آزمون حالت‌های کششی، فشاری و برشی ساده استفاده شده و نتایج با داده‌های تجربی متناظر مقایسه و تحلیل شدند.

یافته‌ها: نتایج نشان داد، بسط و توسعه مدل Bergstrom و Boyce به مدل پیشنهادی در این پژوهش می‌تواند موجب پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار مکانیکی ابرکشسان آمیزه‌ها شود. ضمن آنکه برای هر آمیزه لاستیکی باید پارامترهای مدل تشدید کرنش خاص هر آمیزه به‌طور جداگانه تعیین شود. همچنین نشان داده شد، تلفیق مدل ابرکشسان Yeoh (که بر پایه رابطه به چگالی انرژی کرنشی با ناوردای اول تانسور تغییر شکل است) با رابطه پیشنهادی جدید برای تشدید کرنش قابلیت بسیار خوبی در پیش‌بینی رفتار را در شیوه‌های مختلف بارگذاری دارد.

واژه‌های کلیدی

لاستیک،
رفتار مکانیکی،
پرکننده،
تشدید کرنش،
روش اجزای محدود

* مسئول مکاتبات، پیام‌نگار:

M.H.R.Ghoreishy@ippi.ac.ir

مقدمه

پیش‌بینی رفتار مکانیکی به‌ویژه ضریب کشسانی کامپوزیت‌های پر شده با تقویت‌کننده‌های ذره‌ای همواره از اهمیت زیادی برخوردار بوده است. این کامپوزیت‌ها رفتار همسان‌گرد نشان داده‌اند و یکی از مهم‌ترین چالش‌ها در طراحی محصولات ساخته شده از این مواد تعیین پارامترهای سفتی آن‌هاست. در بحث میکرومکانیک کامپوزیت‌های ذره‌ای تلاش بر این است تا با داشتن خواص سفتی اجزای تشکیل‌دهنده (ماتریس پلیمری و پرکننده) و نیز ترکیب درصد آن‌ها بتوان سفتی کامپوزیت ساخته شده را پیش‌بینی کرد. این نکته افزون بر طراحی محصول، کمک شایانی به انتخاب مناسب درصد پرکننده (یا پرکننده‌ها) می‌کند. مطالعات فراوان و با بیشینه تاریخی نسبتاً طولانی با روش‌های نظری و تجربی تاکنون در این زمینه انجام شده و روش‌های مختلفی بدین منظور عرضه شده‌اند. به‌عنوان مثال، می‌توان به معادلاتی که Einstein در ۱۹۰۶ میلادی برای پیش‌بینی افزایش گرانروی ناشی از افزودن ذرات کروی به سیالی گرانرو پیشنهاد کرد و معادله Smallwood در ۱۹۴۴ میلادی که بر اساس معادله Einstein به‌دست آمده است [۱]، اشاره داشت. معادله Einstein نخستین معادله‌ای است که به‌صورت پایه‌ای این موضوع را بحث کرده است. اگرچه این معادله در ظاهر رابطه‌ای پدیده‌نگر (phenomenological) به‌نظر می‌رسد، اما از لحاظ ریاضی قابلیت اثبات دارد که برای نمونه می‌توان به مقاله Haines و Mazzucato [۲] مراجعه کرد. در این معادله، مقدار ضریب کشسانی (E) یک جامد پر شده با ذرات کروی شکل در کرنش‌های کم از معادله (۱) به‌دست می‌آید:

$$E = E_m(1 + 2.5v_f) \quad (1)$$

که E_m و v_f به ترتیب ضریب کشسانی ماتریس و جزء حجمی پرکننده هستند. آزمایش‌های انجام شده نشان داد، این معادله تنها برای مقادیر بسیار کم پرکننده قابلیت کاربرد دارد. Guth و Gold معادله کامل‌تری را به شکل معادله (۲) پیشنهاد دادند [۳]:

$$E = E_m(1 + 2.5v_f + 14.1v_f^2) \quad (2)$$

سپس، این معادله برای پرکننده‌های میله‌ای شکل توسط همین پژوهشگران توسعه یافت که به شکل معادله (۳) ارائه شد:

$$E = E_m(1 + 0.67g_f v_f + 1.62(g_f v_f)^2) \quad (3)$$

در این معادله، g_f پارامتری بوده که با نام اثر شکل خوانده شده و مقدار آن بین ۴ تا ۱۰ است. از دیگر معادله‌هایی که برای پیش‌بینی ضریب کشسانی کامپوزیت‌ها ارائه شده می‌توان به معادله Voigt [۴] (معادله (۴)) اشاره کرد:

$$E = v_f E_f + (1 - v_f) E_m \quad (4)$$

و نیز معادله Reuss [۴] که به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$E = E_f \frac{5E_m + 3v_f(E_f - E_m)}{5E_f - 2v_f(E_f - E_m)} \quad (5)$$

در این معادله‌ها، E_f و E_m به ترتیب ضریب کشسانی جزء تقویت‌کننده (ذره) و ماتریس پلیمری هستند. در ادامه این کارها مدل‌های جدیدتری نیز توسعه یافته‌اند که از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به مدل Mori-Tanaka [۵] اشاره داشت که برای پیش‌بینی ضرایب توده و برشی کامپوزیت به صورت زیر ارائه شدند:

$$K = k_m + \frac{v_f(K_f - K_m)K_m}{3(1 - v_f)(K_f - K_m)K_m + K_m} \quad (6)$$

$$\mu = \mu_m + \frac{v_f(\mu_f - \mu_m)\mu_m}{(1 - v_f)(\mu_f - \mu_m) \frac{6(K_m + 2\mu_m)}{5(3K_m + 4\mu_m)} + \mu_m} \quad (7)$$

در این معادله‌ها، K_f و K_m به ترتیب ضرایب توده ماتریس و پرکننده و μ_m و μ_f ضرایب برشی ماتریس و پرکننده هستند. مطالعه‌های مربوط به پیش‌بینی خواص فیزیکی و مکانیکی کامپوزیت‌ها به دلیل پیچیدگی برهم‌کنش ماتریس پلیمری و پرکننده همانند اندازه، نوع و شکل پرکننده، ساختار پرکننده و تجمع آن، اثر فاز میانی و شیوه بارگذاری همچنان در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران بوده است. از جمله کارهای اخیر می‌توان به مقاله مروری Raju و همکاران [۶] اشاره کرد که در آن مطالعه جامعی درباره میکرومکانیک مواد کامپوزیتی و مدل‌های ارائه شده انجام شد. آن‌ها از معادله‌های ساده Voigt و Reuss (معادله‌های (۴) و (۵)) شروع کردند و ضمن بررسی تمام معادله‌های ارائه شده مدل جدیدی بر پایه مدل Mori-Tanaka نوشتند که برای کامپوزیت‌های با درصد پرکننده زیاد قابلیت کاربرد داشته باشد. آن‌ها همچنین کارآمدی این مدل‌ها را با روش جزء محدود بررسی کردند. Abhisha و همکاران [۷] با استفاده از مدل‌های Guth، Einstein و مدل‌های جدیدتر خواص مکانیکی و الکتریکی آمیزه‌های ساخته شده بر پایه کائوچوی طبیعی و دوده را بررسی و مطالعه کردند. آن‌ها نشان

دادند، اگرچه این مدل‌ها روند افزایشی خواص با درصد پرکننده (دوده) را پیش‌بینی می‌کنند، اما نتایج با داده‌های واقعی اختلاف دارد و نیز مقدار خطا در پیش‌بینی خواص با افزایش درصد پرکننده نیز افزایش می‌یابد. Luo [8] مدل‌های ساده Voigt و Reuss را با استفاده از نظریه انرژی معادل‌سازی کرنشی عمودی و برشی اصلاح کرد و نشان داد، از این راه انطباق بسیار خوبی میان داده‌های تجربی و پیش‌بینی شده برای یک آمیزه غیرپلیمری (کیالت و تنگستن) به وجود می‌آید. این نظریه می‌تواند برای آمیزه‌های پلیمری نیز استفاده شود. اخیراً Kareem و همکاران [9] در مقاله‌ای مروری معادله‌های پیش‌بینی‌کننده خواص مکانیکی کامپوزیت‌های پر شده با ذرات و عملکرد آن‌ها را بررسی کردند. آن‌ها به‌طور ویژه اثر پارامترهای مختلف همچون درصد پرکننده، ساختار هندسی و تجمع ذرات را برای نانوکامپوزیت‌های اپوکسی تقویت‌شده با نانوسیلیکا مطالعه کردند.

از یک دیدگاه این مطالعات را می‌توان به دو دسته کامپوزیت‌هایی که ماتریس آن‌ها از پلاستیک‌های گرم‌انرم یا گرم‌سخت با درصد‌های مختلف تقویت‌کننده‌های ذره‌ای تشکیل شده و کامپوزیت‌هایی که از ماتریس پلیمری لاستیکی ساخته شده‌اند، تقسیم کرد. از دیدگاه طراحی و محاسباتی بین این دو گروه تفاوت‌های پایه‌ای وجود دارد که ضروری است، بدان‌ها توجه شود. نخست اینکه مواد لاستیکی رفتار مکانیکی غیرخطی دارند و بنابراین باید از معادله‌های ابرکشسان استفاده شود. به‌عبارت‌دیگر، برخلاف مواد پلاستیکی، رفتار مکانیکی آن‌ها را نمی‌توان در محدوده کاربردهای مهندسی به‌صورت کشسان خطی در نظر گرفت. دومین نکته مقدار کرنش اعمال‌شده است، به‌نوعی که کامپوزیت‌های لاستیکی (که در صنعت از آن‌ها با نام آمیزه‌های لاستیکی یاد می‌شود)، تحت تغییر شکل‌های بزرگ قرار گرفته و بنابراین لازم است تا مدل‌های ریاضی داده‌شده برای این مواد قابلیت پیش‌بینی تا درصد‌های زیاد کرنش را داشته باشند. به‌عنوان مثال، در تایلر خودروهای سواری و باری مقدار کرنش برشی می‌تواند به‌ترتیب تا ۸٪ و ۱۵٪ و کرنش فشاری به ۵٪ و ۱۴٪ برسد. این در حالی است که در قطعه‌های کامپوزیتی ساخته‌شده از ماتریس پلاستیکی مقدار کرنش به‌ندرت از ۱٪ تا ۲٪ فراتر می‌رود، زیرا در مقدارهای بیشتر، ماده وارد فاز پلاستیک می‌شود و تغییر شکل دائمی داده یا شکست روی می‌دهد. مطلب سوم به شیوه بارگذاری مربوط است. آمیزه‌های لاستیکی در شیوه‌های مختلف بارگذاری (کششی، فشاری، برشی و خمشی) رفتار مکانیکی متفاوتی نشان می‌دهند. این بدان معنی است، معادله‌ای که برای حالت کششی جواب قابل قبولی می‌دهد، لزوماً برای حالت برشی یا فشاری مناسب نیست و باید عملکرد یک مدل مشخص در تمام شیوه‌های بارگذاری سنجش شود. برای نخستین بار

$$X = 1 + 2.5v_f + 14.1v_f^2 \quad (8)$$

این روش بعدها توسط Bergstrom و Boyce [11, 12] به حالت سه‌بعدی تعمیم داده شده و معادله (۹) برای معادله‌های ابرکشسانی که در آن‌ها تابع چگالی انرژی کرنشی فقط تابعی از نوردای اول تانسور تغییر شکل چپ Cauchy-Green باشد (مانند معادلات Neo-Hookean یا Yeoh)، پیشنهاد شد:

$$\langle I_1 \rangle = X(I_1 - 3) + 3 \quad (9)$$

در این معادله، نوردای اول تانسور تغییر شکل چپ Cauchy-Green و $\langle I_1 \rangle$ مقدار تشدید یافته آن (amplified) است. مقدار X نیز مانند معادله Mullins و Tobin محاسبه شده و به‌طور خاص پیشنهاد شده است که با معادله (۱۰) داده شود:

$$X = 1 + av_f + bv_f^2 \quad (10)$$

که $a = 3/5$ و $b = 30$ است. گفتنی است، توضیح مشخصی درباره نحوه انتخاب دو پارامتر (a و b) داده نشده است. اگر رفتار تنش-کرنش به‌صورت خطی در نظر گرفته شده (مانند پلاستیک‌ها در کرنش‌های کم) یا بررسی رفتار در محدوده خطی برای مواد لاستیکی انجام شود، در آن صورت فاکتور تشدید کرنش را می‌توان برابر با فاکتور تشدید تنش دانست.

در این پژوهش، از دو روش پیشنهادی Bergstrom و Boyce (معادله‌های (۹) و (۱۰)) و یک روش جدید استفاده شده است. بدین‌صورت که معادله ارائه‌شده برای پارامتر تقویت‌کنندگی (X)

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (13)$$

که $\bar{\lambda}_1$ ، $\bar{\lambda}_2$ و $\bar{\lambda}_3$ به ترتیب جزء انحرافی-برشی نسبت‌های کشیدگی کرنش آمیزه لاستیکی افزوده شود. نوآوری دیگر این کار آن است که قابلیت پیش‌بینی این روش براساس داده‌های به‌دست‌آمده از آزمون ساده کشش در پیش‌بینی رفتار ماده در شیوه‌های مختلف بارگذاری (کششی، فشاری و برشی) به‌کمک روش اجزای محدود ارزیابی قرار گرفته تا قابلیت آن در شبیه‌سازی اثر تغییرات پرکننده در قطعه‌های لاستیکی که تحت بارهای پیچیده قرار می‌گیرند (مانند تایر)، سنجیده شود. این نکته بسیار حائز اهمیت است، زیرا انجام آزمون در شیوه‌های برشی و فشاری زمان‌بر و پرهزینه‌تر از آزمون ساده کشش است. از این‌رو در پژوهش حاضر سعی شد تا مبنای کار بر استفاده از مدل‌های ابرکشسانی قرار گیرد که قابلیت پیش‌بینی جواب‌های دقیق از پارامترهای به‌دست‌آمده از آزمون کشش را دارند (مانند مدل Yeoh که در بخش بعد بدان اشاره می‌شود).

$$\bar{W} = (1 - \nu_f)\bar{W}_m \quad (14)$$

در این معادله، ν_f جزء حجمی پرکننده و \bar{W}_m معادله ابرکشسان (۱۱) بوده که پارامترهای آن برای آمیزه خالص (بدون پرکننده یا Neat) است و مقدار \bar{I}_1 با مقدار $\langle \bar{I}_1 \rangle$ داده‌شده در معادله (۹) جایگزین شده است. برای مقدار (X) دو گزینه در نظر گرفته شد. ابتدا فرض شد، با معادله $X = 1 + a\nu_f + b\nu_f^2$ بیان شود که $a = 3/5$ و $b = 30$ است (معادله (۱۰)). در گزینه دوم که در این کار پیشنهاد شده است، فرض شد، کمیت یادشده با رابطه تعمیم‌یافته زیر بیان شود:

$$X = 1 + \sum_{i=1}^N a_i \nu_f^i \quad (15)$$

که پارامترهای a_i و N به‌کمک برازش تعیین شده است که در بخش محاسباتی به تفصیل درباره آن‌ها بحث می‌شود.

تجربی

مواد و دستگاه

در این پژوهش، از آمیزه‌های لاستیکی بر پایه کائوچوی SBR امولسیون‌گونه ۱۷۱۲ استفاده شد. در این آمیزه‌ها به‌ازای هر صد قسمت لاستیک (phr) از ۵ قسمت روی اکسید (ZnO)، ۲ قسمت استتاریک اسید، ۳ قسمت ضد اکسنده و ضدتخریب N-(۳،۱)-دی‌متیل‌بوتیل- \dot{N} -فنیل-p-فنیلن‌دی‌آمین (6PPD)، پلی(۲،۱)-دی‌هیدرو-۲،۴،۶-تری‌متیل-کینولین (TMQ)، ۱/۵ قسمت شتاب‌دهنده N-ترشیوبوتیل-۲-بنروتیازول سولفناמיד (TBBS)، ۰/۵ قسمت شتاب‌دهنده تترامتیل تیورام دی‌سولفید (TMTD)، ۲ قسمت گوگرد و از دوده N330 به‌عنوان پرکننده تقویتی در مقادیر ۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ و ۶۰ قسمت (شش نمونه) استفاده شد. این مقادیر به تولید آمیزه‌هایی با ۰، ۱۲، ۱۷، ۲۱، ۲۵ و ۲۸٪ وزنی پرکننده منجر شدند. گفتنی است، در صنعت لاستیک معمولاً از قسمت

(معادله ۱۰) به یک معادله چندجمله‌ای به‌صورت پدیده‌نگران عمومی‌تر داده‌شده تا بر دقت روش در پیش‌بینی رفتار تنش برحسب کرنش آمیزه لاستیکی افزوده شود. نوآوری دیگر این کار آن است که قابلیت پیش‌بینی این روش براساس داده‌های به‌دست‌آمده از آزمون ساده کشش در پیش‌بینی رفتار ماده در شیوه‌های مختلف بارگذاری (کششی، فشاری و برشی) به‌کمک روش اجزای محدود ارزیابی قرار گرفته تا قابلیت آن در شبیه‌سازی اثر تغییرات پرکننده در قطعه‌های لاستیکی که تحت بارهای پیچیده قرار می‌گیرند (مانند تایر)، سنجیده شود. این نکته بسیار حائز اهمیت است، زیرا انجام آزمون در شیوه‌های برشی و فشاری زمان‌بر و پرهزینه‌تر از آزمون ساده کشش است. از این‌رو در پژوهش حاضر سعی شد تا مبنای کار بر استفاده از مدل‌های ابرکشسانی قرار گیرد که قابلیت پیش‌بینی جواب‌های دقیق از پارامترهای به‌دست‌آمده از آزمون کشش را دارند (مانند مدل Yeoh که در بخش بعد بدان اشاره می‌شود).

این موارد برای نخستین بار انجام شد که در بخش‌های بعدی جزئیات آن‌ها بررسی می‌شود. افزون بر این‌ها یک زیربرنامه اختصاصی به زبان فرترن نوشته شد تا بتوان اثر مقدار پرکننده بر رفتار ابرکشسان را در آمیزه‌های لاستیکی شبیه‌سازی کرد. در ادامه، ابتدا مدل ماده و سپس بخش‌های تجربی و محاسباتی برای آمیزه لاستیکی بر پایه کائوچوی SBR ارائه شده و سپس نتایج و بحث و نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

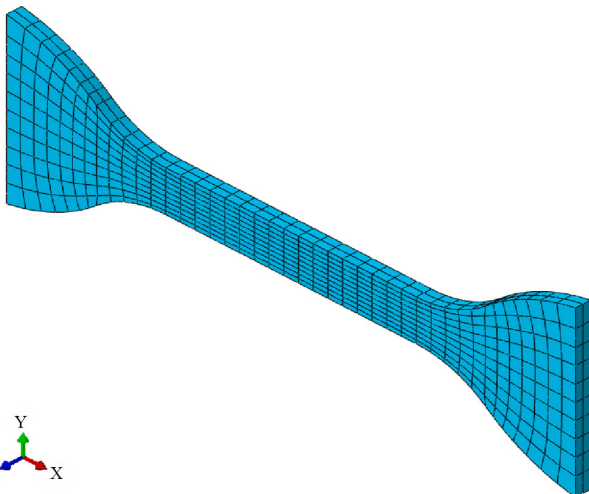
مدل ماده

در این کار فرض شد، آمیزه لاستیکی اولیه (بدون پرکننده) یک ماده تقریباً تراکم‌ناپذیر است و رفتار مکانیکی آن در حالت هم‌دم با معادله پدیده‌نگر ابرکشسان Yeoh [۱۳] داده‌شده در زیر بیان شود:

$$\bar{W}(\bar{I}_1, J) = C_1(\bar{I}_1 - 3) + C_2(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_3(\bar{I}_1 - 3)^3 + (11) \\ \frac{1}{D_1}(J - 1)^2 + \frac{1}{D_2}(J - 1)^4 + \frac{1}{D_3}(J - 1)^6$$

در این معادله \bar{W} چگالی انرژی کرنشی، C_1 ، C_2 ، C_3 ، D_1 و D_2 پارامترهای مدل هستند. همچنین \bar{I}_1 و J به ترتیب ناوردای اول بخش انحرافی-برشی (deviatoric) تانسور تغییر شکل چپ Cauchy- Green ($\bar{\mathbf{B}}$) و دترمینان تانسور گرادیان تغییر شکل (F) بوده که به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$\bar{I}_1 = \text{trace}(\bar{\mathbf{B}}) = \text{trace}\left(J^{-\frac{2}{3}}\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T\right) = \bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2 \quad (12)$$



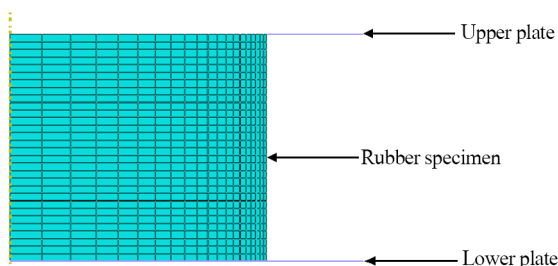
شکل ۱- شبکه سه‌بعدی مدل اجزای محدود نمونه آزمون کشش (استاندارد ASTM D412 C).

Fig. 1. 3D Finite element mesh of the uniaxial test sample (ASTM D412 C).

در نظر گرفتن اثر مقدار پرکننده بر رفتار ابرکشسان نوشته نشده است که از این لحاظ می‌توان آن را نیز جزو نوآوری‌های کار حاضر دانست.

تعیین پارامترهای مدل ماده و صحت‌سنجی

ابتدا داده‌های تنش برحسب کرنش و تراکم‌پذیری برای آمیزه خالص (Neat) با گد C_0 که از آزمون‌های گفته‌شده به‌دست آمده بودند، با نرم‌افزار MCalibration [۱۸] برازش شد و پارامترهای معادله Yeoh (معادله ۱۱) برای آن محاسبه که در جدول ۱ آورده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ضرایب D_1 ، D_2 و D_3 مقادیر بسیار کمی دارد که



شکل ۲- شبکه مدل اجزای محدود آزمون فشاری-تماسی (استاندارد ISO 7743).

Fig. 2. Axisymmetric finite element mesh of the compression test (ISO 7743).

وزنی به‌جای درصد وزنی استفاده می‌شود. بر این اساس در ادامه مقاله به این آمیزه‌ها با توجه قسمت وزنی پرکننده اشاره می‌شود. این آمیزه‌ها با گدهای C_0 ، C_{20} ، C_{30} ، C_{40} ، C_{50} و C_{60} نامیده می‌شوند. جزئیات بیشتر مواد اولیه آمیزه‌های تهیه‌شده در مقاله پیشین [۱۴] آورده شده و بنابراین از تکرار آن‌ها خودداری شده است. برای اختلاط آمیزه‌ها از دستگاه مخلوط‌کن دوغلتکی مدل Schwabenthan 200 L استفاده شد. زمان پخت بهینه نمونه‌ها به‌کمک رثومتر با دیسک نوسانی (ODR) تعیین شد. فرایند پخت نیز با پرس ۱۰۰ تن مدل Bucher ساخت سوئیس انجام شد.

روش‌ها

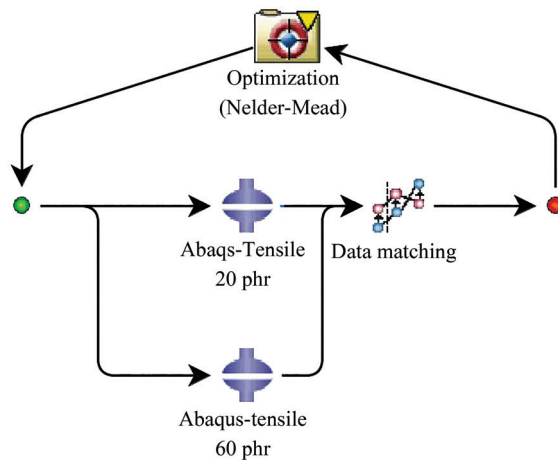
ساخت نمونه‌ها

هر یک از هفت آمیزه ساخته‌شده در تهیه چهار مجموعه نمونه به‌منظور آزمون‌های کشش تک‌محوری مطابق استاندارد ASTM D412C و تراکم‌پذیری حجمی (volumetric) مطابق روش گفته‌شده در مرجع ۱۵، فشاری-تماسی (compression) مطابق استاندارد ISO7743 و برشی چهاربخشی (quadruple simple shear) مطابق استاندارد ISO 1827 به‌کارگرفته شدند. این نمونه‌ها در فک‌های اختصاصی هر آزمون قرارگرفته و با دستگاه کشش Universal ساخت Hiwa آزمون شدند و داده‌های نیرو برحسب جابه‌جایی ثبت شد. این داده‌ها سپس به‌کمک معادله‌های مربوط [۱۶، ۱۵] به داده‌های تنش برحسب کرنش عمودی در آزمون کششی و فشاری، کرنش برشی برای آزمون برشی ساده و کاهش حجم در آزمون تغییرات حجمی تبدیل شدند.

محاسبات

مدل اجزای محدود

برای انجام محاسبات لازم سه مدل اجزای محدود غیرخطی برای آزمون‌های یادشده (در حالت‌های کششی تک‌محوری، فشاری-تماسی و برشی) در محیط نرم‌افزار Abaqus [۱۷] ساخته شد. شکل‌های ۱، ۲ و ۳ این مدل‌ها را نشان می‌دهد. برای آزمون در حالت‌های کششی تک‌محوری (شکل ۱) از مدل سه‌بعدی با ۸۲۰ جزء و ۴۹۲۳ گره و برای مدل‌های فشاری-تماسی (شکل ۲) و برشی ساده (شکل ۳) به‌ترتیب از اجزای با تقارن محوری و کرنش صفحه‌ای استفاده شد که به ۶۰۰ و ۱۸۴۰ جزء همراه با ۶۵۳ و ۵۸۸۱ گره شبکه‌بندی شده بودند. برای در نظر گرفتن مدل ماده ابرکشسان بر پایه تشدید کرنش (معادله‌های (۹) و (۱۰)) یک زیربرنامه اختصاصی به زبان فرترن با نام UHYPER نوشته و به برنامه اصلی نرم‌افزار Abaqus اتصال (Link) داده شد. مطابق بررسی‌های انجام‌شده تاکنون چنین زیربرنامه‌ای برای



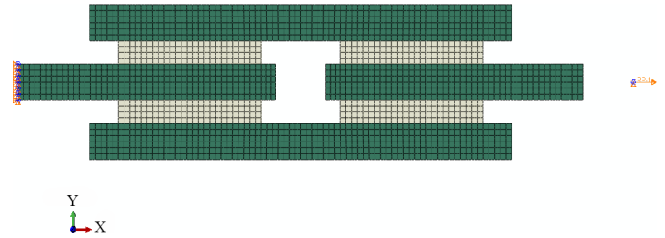
شکل ۴- نمودار جریان فرایند بهینه‌سازی تعیین پارامترهای معادله (۱۵).
Fig. 4. Optimization process for the determination of the parameters of the equation (15).

انتخاب و سپس با استفاده از این مقادیر اولیه، محاسبه تنش برحسب کرنش در نرم‌افزار Abaqus انجام شد. در گام بعدی داده‌های تنش محاسبه‌شده با مقادیر تجربی مقایسه و به کمک الگوریتم بهینه‌سازی Nelder-Mead حدس‌های اولیه بهبودیافته تا جایی که اختلاف بین داده‌های تجربی و محاسبه‌شده به مقادیر کمینه خود برسند. مقادیر این پارامترها در جدول ۲ داده شده‌اند.

در گام سوم برای سنجش دقت و صحت این روش‌ها سه آزمون کشش تک‌محوری، فشاری-تماسی و برشی ساده نشان داده‌شده در شکل‌های ۱ تا ۳ با استفاده از پارامترهای داده‌شده در جدول ۲ و مدل پیشنهادی Bergstrom و Boyce ($X = 1 + 3.5v_f + 30v_f^2$) به کمک نرم‌افزار Abaqus شبیه‌سازی شد که نتایج در بخش بعد ارائه و تحلیل می‌شوند.

نتایج و بحث

شکل‌های ۵ و ۶ تغییرات تنش برحسب کرنش در شیوه کشش در



شکل ۳- شبکه مدل اجزای محدود آزمون برش ساده چهاربخشی (استاندارد ISO 1827).

Fig. 3. Finite element mesh of the quadruple simple shear test (ISO 1827).

نشان‌دهنده تراکم‌ناپذیری بسیار زیاد نمونه به دلیل نبود پرکننده است (نسبت پواسون با استفاده از معادله $v = 3 - 2D_1C_1/6 + 2D_1C_1$ برابر $v = 0.499$ به دست می‌آید).

در مرحله بعد این پارامترها در مدل اجزای محدود کششی نشان‌داده شده (شکل ۱) همراه با زیربرنامه اختصاصی که در آن اثر تشدید کرنش اعمال شده بود، برای نمونه‌های C_{20} و C_{60} قرار داده شدند. هدف اصلی در این مرحله همان‌طور که پیش‌تر نیز بدان اشاره شده بود، بررسی عملکرد مدل‌های تقویت‌کننده (از جمله مدل پیشنهادشده در این کار) برای محدوده مقادیر مختلف پرکننده تقویتی (دوده) و نیز شیوه‌های مختلف بارگذاری (فشاری و برشی) است. بدین منظور، ابتدا پارامترهای مدل تشدید کرنش (معادله ۱۵) با استفاده از برازش غیرخطی روی داده‌های تجربی به دست آمده روی نمونه‌های C_{20} و C_{60} از آزمون کشش تک‌محوری به دست آمدند. سپس، قابلیت پیش‌بینی رفتار مکانیکی مدل‌های پیشنهادی در این پژوهش و مدل ارائه‌شده توسط Bergstrom و Boyce از مقایسه نتایج تجربی و پیش‌بینی‌شده به کمک شبیه‌سازی روی نمونه‌های C_{30} ، C_{40} و C_{50} در شیوه‌های بارگذاری فشاری-تماسی و برشی سنجش شدند. برای نیل به این هدف یک فرایند محاسباتی اختصاصی در نرم‌افزار Isight [۱۹] ایجاد شد که نمودار جریان (flow chart) آن در شکل ۴ نشان داده شده است. همان‌طور مشاهده می‌شود، ابتدا مجموعه‌ای از حدس‌های اولیه برای ضرایب معادله (۱۵)

جدول ۱- پارامترهای معادله Yeoh (معادله (۱۰)) برای آمیزه خالص، C_0 (بدون پرکننده).

Table 1. Material constants of the Yeoh equation (Eq. 9) for neat compound (C_0).

C_1	C_2	C_3	D_1	D_2	D_3
(MPa)			1/MPa		
0.189	-0.00846	0.00086	0.0001	0.00005	0.00003

جدول ۲- پارامترهای معادله (۱۵) محاسبه شده با فرایند بهینه‌سازی.

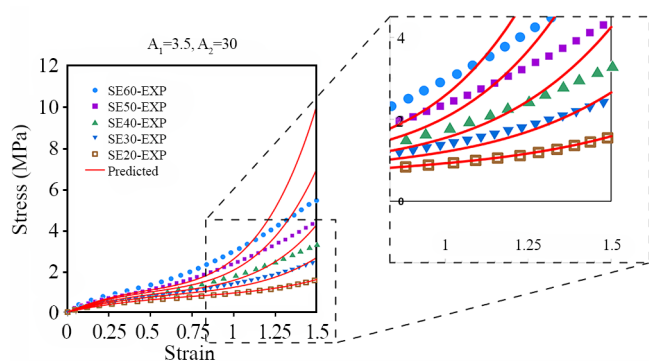
Table 2. Computed parameters of the equation 15.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
3.3	22	45	52	70

تجربی نشان می‌دهد. دلیل اصلی بهبود عملکرد مدل پیشنهادی در این است که مدل مزبور دارای جمله‌های بیشتری است و بنابراین از دقت بالاتری برخوردار است. همچنین پارامترهای این مدل به‌طور ویژه برای آمیزه استفاده شده در این پژوهش به دست آمدند. به عبارت دیگر، برخلاف سایر مدل‌ها که سعی در ارائه پارامترهای ثابت برای تمام کامپوزیت‌ها دارند در اینجا پارامترها برای یک آمیزه مشخص به دست آمده و بدیهی است که برای هر آمیزه باید پارامترهای همان کامپوزیت به‌طور جداگانه به دست آیند.

مشابه این شبیه‌سازی‌ها برای حالت فشاری-تماسی انجام شد که نمودار تغییرات تنش برحسب کرنش فشاری برای دو مدل پیشنهادی در این کار و مدل Bergstrom و Boyce در شکل‌های ۷ و ۸ نشان داده شده‌اند. در اینجا نیز دیده می‌شود، مدل پیشنهادی با دقت بسیار بیشتری به‌ویژه برای مقادیر زیاد پرکننده رفتار تنش برحسب کرنش را پیش‌بینی می‌کند که این را می‌توان در مقایسه با بارگذاری کششی به شکسته شدن ناچیز شبکه پرکننده در اثر بارگذاری فشاری نسبت داد. ضمن اینکه در مقادیر کم هر دو مدل دقت بسیار خوبی دارند. این مطلب به‌ویژه برای شبیه‌سازی تایر که بیشتر تحت تغییر شکل‌های فشاری و برشی قرار می‌گیرد، اهمیت زیادی دارد.

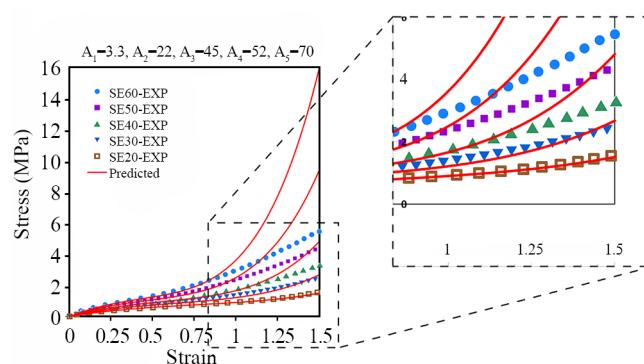
شکل‌های ۹ و ۱۰ نیز به ترتیب همان نتایج (تنش برحسب کرنش) را



شکل ۶- نمودار تغییرات تنش برحسب کرنش تجربی و پیش‌بینی شده با مدل Bergstrom و Boyce در حالت کشش.

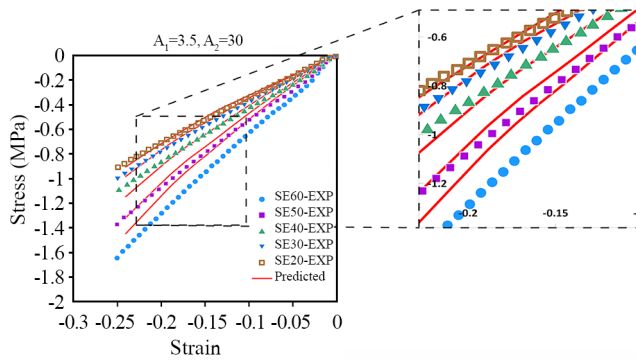
Fig. 6. Variations of the stress vs. strain (experimentally and predicted by the Bergstrom-Boyce model) for uniaxial tension mode.

حالت‌های تجربی و پیش‌بینی شده به کمک مدل پیشنهادی در این کار و مدل Bergstrom و Boyce را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، هر دو مدل برای مقادیر کم پرکننده (۲۰ و ۳۰ پارت دوده) دقت خوبی حتی در مقادیر زیاد کرنش دارند. اما، برای مقادیر بیشتر پرکننده به دلایلی همچون افزایش برهم‌کنش پرکننده-پرکننده و تشدید تشکیل ساختارهای کلوخه‌ای و نیز افزایش لاستیک محبوس شده، دقت هر دو مدل کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، شبکه پرکننده در اثر بارگذاری رخ داده شکسته شده و موجب رهایی لاستیک محبوس شده می‌شود. از آنجا که این لاستیک عملاً پخت نشده و بدون شبکه سه‌بعدی اتصال‌های عرضی است، بنابراین بخشی از اختلاف میان داده‌های تجربی با مقادیر پیش‌بینی شده به همین مطلب برمی‌گردد که به‌ویژه در مقادیر زیاد پرکننده مشاهده می‌شود. اما، مقدار کاهش دقت یکسان نبوده به‌نوعی که مدل پیشنهادی این کار حتی برای مقادیر زیاد دوده (۵۰ و ۶۰ قسمت) تا کرنش‌های ۷۵٪ انطباق بسیار خوبی بین داده‌های تجربی و پیش‌بینی شده از خود نشان می‌دهد و فقط برای کرنش‌های بیشتر انحراف مدل از داده‌های تجربی دیده می‌شود. این قابلیت به‌ویژه هنگام پیش‌بینی رفتار برای آمیزه‌های دارای پرکننده زیاد نظیر آمیزه رویه تایر بسیار حائز اهمیت است. این در حالی که مدل Bergstrom و Boyce برای مقادیر زیاد پرکننده حتی در مقادیر کم کرنش نیز انحراف زیادی از داده‌های



شکل ۵- تغییرات تنش برحسب کرنش تجربی و پیش‌بینی شده با مدل پیشنهادی در حالت کشش.

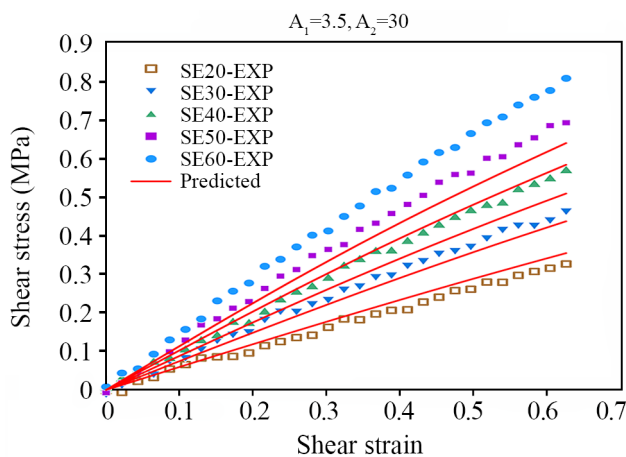
Fig. 5. Variations of the stress vs. strain (experimentally and predicted by the proposed model) for uniaxial tension mode.



شکل ۸- تغییرات تنش برحسب کرنش تجربی و پیش‌بینی شده با مدل Boyce و Bergstrom در حالت فشار.

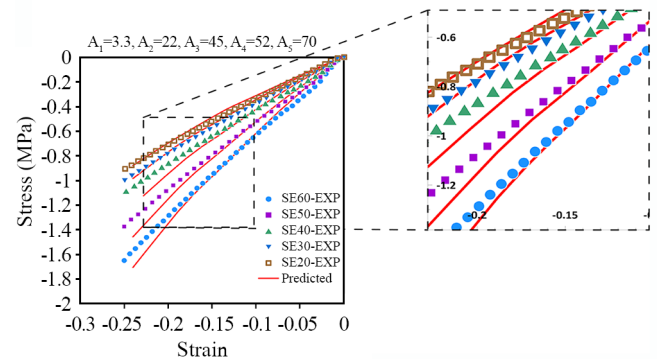
Fig. 6. Variations of the stress vs. strain (experimentally and predicted by the Bergstrom-Boyce model) for compressive (with contact) mode.

Boyce واضح‌تر است که پیش‌تر در حالت کشش نیز دقت کمتری داشت. این پدیده در کار Govindjee [۲۰] نیز مشاهده و گزارش شده بود. دلیل اصلی این موضوع نیز به چرخش ذرات پرکننده در حالت برشی اشاره دارد که در حالت‌های کششی یا فشاری (به دلیل اعمال عمودی نیرو) امکان چرخش ذرات پرکننده عملاً وجود نداشته یا بسیار ناچیز است. از آنجا که مقادیر پارامترهای مدل استفاده شده برای کمیت (X) از آزمون کشش به دست آمده‌اند، امکان بروز خطای ناشی از پدیده یادشده اجتناب‌ناپذیر به نظر می‌رسد. البته ذکر این نکته ضروری است که اگر پارامترهای مزبور براساس بهینه‌سازی داده‌ها



شکل ۱۰- تغییرات تنش برحسب کرنش تجربی و پیش‌بینی شده با مدل Boyce و Bergstrom در حالت برش.

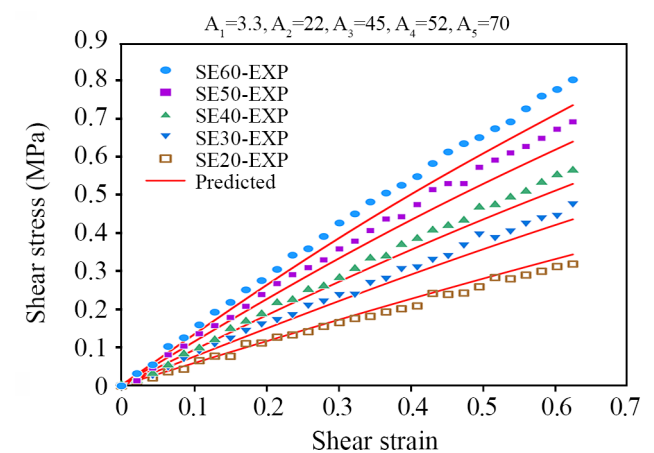
Fig. 6. Variations of the stress vs. strain (experimentally and predicted by the Bergstrom-Boyce model) for simple shear mode.



شکل ۷- تغییرات تنش برحسب کرنش تجربی و پیش‌بینی شده با مدل پیشنهادی در حالت فشار.

Fig. 5. Variations of the stress vs. strain (experimentally and predicted by the proposed model) for compressive (with contact) mode.

برای دو مدل گفته شده در حالت برشی ساده نشان می‌دهند. در اینجا نیز مانند حالت‌های قبل مقایسه بین داده‌های تجربی و پیش‌بینی شده به کمک مدل حکایت از دقت بیشتر مدل پیشنهادی در این کار به ویژه برای مقادیر زیاد پرکننده دارد. حتی در مقادیر بیشتر (۵۰ و ۶۰ قسمت دوده) مدل Boyce و Bergstrom انحراف چشمگیری بین داده‌های تجربی و پیش‌بینی شده نشان می‌دهد. اما نکته‌ای که در نتایج برای هر دو حالت فشاری-تماسی و برشی مشاهده می‌شود، آن است که مقدار انحراف در مقادیر زیاد پرکننده از همان مقادیر کم کرنش آغاز می‌شود. این مطلب به ویژه برای مدل Bergstrom



شکل ۹- تغییرات تنش برحسب کرنش تجربی و پیش‌بینی شده با مدل پیشنهادی در حالت برش.

Fig. 5. Variations of the stress vs. strain (experimentally and predicted by the proposed model) for simple shear mode.

لاستیکی پر شده برحسب مقدار پرکننده (دوده) براساس نظریه تشدید کرنش، از نگاهی نو بررسی شد. نشان داده شد، بسط معادله‌هایی که Guth و Gold به صورت چندجمله‌ای و پدیده‌نگر در گذشته ارائه کرده بودند، به روابط کامل‌تر همراه با یافتن ضرایب اختصاصی برای هر آمیزه لاستیکی به صورت جداگانه و خاص به پیش‌بینی‌های دقیق‌تر منجر می‌شود. همچنین، به کمک روش اجزای محدود و شبیه‌سازی آزمون‌های سه‌گانه در حالت‌های کششی، فشاری-تماسی و برشی و نیز نتایج تجربی به دست آمده از این آزمون‌ها قابلیت و عملکرد این مدل‌ها سنجش شد. دستاوردهای اصلی در این پژوهش را می‌توان در دو نکته مهم دانست. اول اینکه یک روش کارآمد برای تعیین ضرایب معادله تشدید کرنش (معادله ۱۵) ارائه شد که بر پایه الگوریتم کمینه‌سازی اختلاف بین داده‌های تجربی و شبیه‌سازی آزمون کشش قرار دارد. دوم آنکه کارآمدی ضرایب محاسبه شده و روش به کار گرفته شده از مقایسه بین داده‌های تجربی و شبیه‌سازی در شیوه‌های فشاری-تماسی و برشی ساده سنجیده شد. افزون بر این‌ها در کار حاضر برای نخستین بار زیربرنامه اختصاصی برای در نظر گرفتن رفتار ابرکشسان آمیزه‌های لاستیکی نوشته شد که در آن پارامتر مقدار پرکننده لحاظ شده بود و محاسبات اجزای محدود به کمک آن انجام شد.

از آزمون‌های کشش و برش محاسبه شوند، در آن صورت احتمال کاهش خطا در حالت برشی وجود دارد، ضمن آنکه مقدار خطا برای حالت کششی را می‌تواند افزایش دهد. همچنین باید به نکته نیز اشاره داشت که آزمون کشش آسان‌ترین و ارزان‌ترین روش آزمون است و در نتیجه با صرف کمترین هزینه و زمان می‌توان به پارامترها دست یافت. نکته مهم دیگری که لازم است، در اینجا بدان اشاره شود، اثر رفتار گران‌روکشسانی و نیز پدیده نرم‌شدگی تنش است. در مدل‌های مطالعه شده در این پژوهش این مطلب به طور مستقیم بررسی نشده و یکی از دلایل انحراف میان داده‌های آزمایشگاهی و مقادیر محاسبه شده نیز به همین مطلب برمی‌گردد. اما، در کارهای پیشین انجام شده توسط همین پژوهشگران [۱۴، ۲۱] ترکیب مدل‌های گران‌روکشسان و نرم‌شدگی تنش با مدل‌های ابرکشسان به تفصیل بررسی و مطالعه شد. بر این اساس به راحتی می‌توان مدل‌های ابرکشسان بر پایه تشدید کرنش (که در کار حاضر بررسی شده است) را با مدل‌های گران‌روکشسان و نرم‌شدگی تنش (اثر Mullin) در نظر گرفت و اثر آن‌ها را لحاظ کرد.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، موضوع پیش‌بینی رفتار مکانیکی آمیزه‌های

مراجع

- Smallwood H.M., Limiting Law of the Reinforcement of Rubber, *J. Appl. Phys.*, **15**, 758-766, 1944.
- Haines B.M. and Mazzucato A.L., A Proof of Einstein's Effective Viscosity for a Dilute Suspension of Spheres, *SIAM J Math Anal*, **44**, 2120-2145, 2012.
- Guth E., Theory of Filler Reinforcement, *Rubber Chem. Technol.*, **18**, 596-604, 1945.
- Ward I.M. and Sweeney J., *Mechanical Properties of Solid Polymers*, 3rd ed., John Wiley and Sons, Chichester, West Sussex, 227-259, 2013.
- Mori T. and Tanaka K., Average Stress in Matrix and Average Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions, *Acta Metall.*, **21**, 571-574, 1973.
- Raju B., Hiremath S.R., and Mahapatra D.R., A Review of Micromechanics Based Models for Effective Elastic Properties of Reinforced Polymer Matrix Composites, *Compos. Struct.*, **204**, 607-619, 2018.
- Abhisha V.S., Sisanth K.S., Parameswaranpillai J., Pulikalparambil H., Siengchin S., Thomas S., and Stephen R., Comprehensive Experimental Investigations and Theoretical Predictions on The Physical Properties of Natural Rubber Composites, *J. Appl. Polym. Sci.*, **139**, e53197, 2022.
- Luo Y., Isotropized Voigt-Reuss Model for Prediction of Elastic Properties of Particulate Composites, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **29**, 3934-3941, 2022.
- Kareem S., Al-Ansari L.S., and Gömze L.A., Modeling of Modulus of Elasticity of Nano-Composite Materials: Review and Evaluation, *J. Phys. Conf. Ser.*, **2315**, 012038, 2022.
- Mullins L. and Tobin N.R., Stress Softening in Rubber Vulcanizates. Part I. Use of a Strain Amplification Factor to Describe

- the Elastic Behavior of Filler-Reinforced Vulcanized Rubber, *J. Appl. Polym. Sci.*, **9**, 2993-3009, 1965.
11. Bergström J.S. and Boyce M.C., Mechanical Behavior of Particle Filled Elastomers, *Rubber Chem. Technol.*, **72**, 633-56, 1999.
 12. Bergström J.S. and Boyce M.C., Large Strain Time-Dependent Behavior of Filled Elastomers, *Mech. Mater.*, **32**, 627-644, 2000.
 13. Yeoh O.H., Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber, *Rubber Chem. Technol.*, **66**, 754-771, 1993.
 14. Ghoreishy M.H.R. and Abbassi-Sourki F., Study the Hyper-Viscoelastic and Stress Softening Behaviors of Various SBR/CB Filled Compounds Using a Triple Model, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **33**, 339-350, 2020.
 15. Ghoreishy M.H.R., Computer Simulation of Passenger Car Radial Tires Using the Finite Element Method, Michael D. Pfeffer and Bachmeier E. (Eds.), *Comput. Simul. Adv. Res. Appl.*, Nova Science, New York, 1-61, 2018.
 16. Brown R., *Physical Testing of Rubber, 4th ed.*, Springer, New York, 155-157, 2006.
 17. Abaqus, Simulia Corporation, Dassault Systemes, Providence, RI, USA, 2020.
 18. MCalibration, Veryst Engineering, Needham, MA, USA, 2020.
 19. Isight, Simulia Corporation, Dassault Systemes, Providence, RI, USA, 2020.
 20. Govindjee S., An Evaluation of Strain Amplification Concepts via Monte Carlo Simulations of an Ideal Composite, *Rubber Chem. Technol.* **70**, 25-37, 1997.
 21. Ghoreishy M.H.R. and Abbassi-Sourki F., Development of a New Model Based on Ogden-Roxburgh Model for the Prediction of the Stress-Softening Behavior of Carbon Black-Filled Rubber Compounds, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **35**, 69-82, 2022.

