

# تعیین ضرایب تطابق روش سوراخکاری مرکزی در کامپوزیت‌های ناهمسانگرد به روش حل دقیق

## Determination of Calibration Factors of the Central Hole Drilling Method for Orthotropic Composites Using an Exact Solution

محمود مهرداد شکریه\*، احمد رضا قاسمی خوزانی

تهران، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی مکانیک، صندوق پستی ۱۶۸۴۶/۱۳۱۱۴

دریافت: ۸۴/۱۰/۲۸، پذیرش: ۸۵/۴/۱۴

### چکیده

روش سوراخکاری مرکزی برای تعیین تنشهای پسماند در مواد مختلف بکار برده شده است. ضرایب تطابق، کرنشهای رها شده روش سوراخکاری مرکزی را به تنشهای پسماند موجود در سازه تبدیل می‌کند. در مواد ناهمسانگرد برای تبدیل کرنشهای رها شده روش سوراخکاری مرکزی به تنشهای پسماند موجود در سازه روشهای متفاوتی ارائه شده است. در این روشها تعداد ضرایب تطابق از دو ضریب تا یک ماتریس ضرایب  $3 \times 3$  تغییر کرده است. در این پژوهش، با استفاده از حل دقیق تنش و کرنش در صفحه‌ای ناهمسانگرد، ضرایب تطابق روش سوراخکاری مرکزی برای مواد ناهمسانگرد معین شده است. بدین منظور با فرض تنش صفحه‌ای، تنش و کرنش در نقاط کرنش سنجی یک کرنش سنج روزت در صفحه بدست آمده است. با ایجاد سوراخی دایره‌ای در مرکز روزت توزیع تنش و کرنش تغییر می‌کند. با تعیین توزیع تنش در نقاط کرنش سنجی روزت اطراف سوراخ، توزیع کرنش شعاعی قابل محاسبه است. بنابراین، می‌توان کرنش رها شده در روش سوراخکاری مرکزی را به طور تحلیلی محاسبه کرد. با این روش ضرایب تطابق برای هر ماده ناهمسانگرد و هر درجه‌ای از خواص ناهمسانگردی به طور تحلیلی قابل بیان است. این ضرایب مستقل از بارگذاری بوده، تنها به خواص ماده ناهمسانگرد و نسبت شعاع روزت به شعاع سوراخ وابسته‌اند. روش ارائه شده در این پژوهش نه تنها محدود به حالات خاص ناهمسانگرد نیست، بلکه با ارائه معادلات صریحی برای هر آرایه از ماتریس ضرایب، محاسبه ضرایب را بسیار ساده می‌کند. همچنین، خواص مواد و نسبت قطر سوراخ به قطر روزت در معادلات ظاهر شده، نیاز به تهیه جدول و میان‌یابی را حذف می‌کند. در ابتدا نتایج عددی به شکل منحنی برای لایه ناهمسانگرد کربن - اپوکسی  $T300/5208$  نمایش داده شده است. در ادامه، ضرایب تطابق برای چند کامپوزیت تک جهتی، با استفاده از حل تحلیلی ارائه شده، محاسبه شده است. مقایسه نتایج بدست آمده از روش تحلیلی با نتایج شبیه‌سازی فرایند سوراخکاری مرکزی به روش اجزای محدود بیانگر صحت روش انجام شده در محاسبه ضرایب تطابق و خطای کمتر از ۱۰ درصد بین نتایج تحلیلی و نتایج عددی است.

### واژه‌های کلیدی

حل دقیق، تنش پسماند، ماده ناهمسانگرد، ضرایب تطابق، روش سوراخکاری

### مقدمه

تنش و کرنش در نمونه‌ای بدون سوراخ و نمونه‌ای سوراخدار بنا شده است. در این معادله ابتدا تنش در نمونه بدون سوراخ به شکل پارامتری بیان شده است. سپس، معادلاتی که در همان نمونه با ایجاد سوراخی برای تنش متصور است، بیان شده است. اختلاف این دو

روش سوراخکاری مرکزی برای اندازه‌گیری تنشهای پسماند در محدوده گسترده‌ای از مواد مهندسی استفاده می‌شود. کاربرد این روش در مواد همسانگرد به شکل استاندارد درآمده است [۱]. اندازه‌گیری تنشهای پسماند در اثر فرایند سوراخکاری مرکزی، بر اساس معادله‌های

### Key Words

exact solution, residual stress, orthotropic material, calibration factors, hole drilling method

چند لایه‌های کامپوزیتی بررسی و نتایج با فرضیه کلاسیک لایه‌ای مقایسه شد [۱۱]. با استفاده از روش اجزای محدود، روش سوراخکاری مرکزی در مواد ناهمسانگرد و همسانگرد شبیه‌سازی و ضرایب تطابق با این روش محاسبه شد [۱۲].

در این پژوهش، حل تحلیلی تنش در اطراف سوراخ دایره‌ای در ماده‌ای ناهمسانگرد بررسی شده است. در هر بخش ابتدا معادلات مربوط استخراج شده و ضرایب تطابق مواد ناهمسانگرد با استفاده از حل دقیق تنش و کرنش در نقاط کرنش‌سنجی کرنش‌سنج روزت بدست آمده است. سپس، نتایج عددی معادلات ارائه شده برای لایه ناهمسانگرد کربن - اپوکسی T۳۰۰/۵۲۰۸ نمایش داده شده است. در نهایت نتایج روش حل دقیق و روش اجزای محدود مقایسه شده است.

### معادلات تنش و کرنش در صفحه ناهمسانگرد

در صفحه ناهمسانگرد برای حالت دوبعدی تنش صفحه‌ای، پنج ثابت کشسان برای نسبت دادن تنش و کرنش نیاز است  $(E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yx})$ . پنج ثابت ماده ناهمسانگرد با معادله زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند که در آن  $\beta_1$  و  $\beta_2$  ریشه‌های مختلط معادله اند [۱۳]:

$$\frac{\beta^4}{E_x} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) \beta^2 + \frac{1}{E_y} = 0 \quad (1)$$

هنگامی که محورهای مختصات X و Y در جهت‌های اصلی کشسان ماده قرار داشته باشند، قانون عمومی هوک به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{yx} \frac{\sigma_y}{E_y} \quad (2)$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{xy} \frac{\sigma_x}{E_x} \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (4)$$

به علت خاصیت تقارن کشسان مطابق معادله (۵) چهار ثابت از پنج ثابت ذکر شده مستقل اند:

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad (5)$$

با استفاده از معادله (۱) می‌توان نوشت:

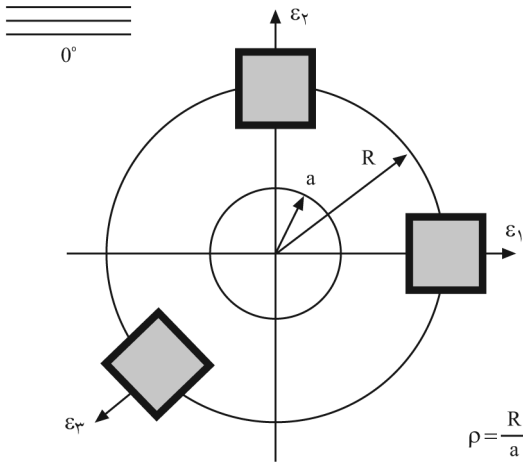
$$E_y = \frac{E_x}{\beta_1^2 \beta_2^2} \quad (6)$$

$$G_{xy} = -\frac{E_x}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\nu_{xy}} \quad (7)$$

مقدار در هر نقطه اطراف سوراخ بیانگر تنش آزاد شده در اثر سوراخکاری است. در روش سوراخکاری مرکزی ابتدا کرنش‌سنج روزت (rosette) به سطح قطعه دارای تنش پسماند چسبانده می‌شود. روزت ساعتگرد شامل سه کرنش‌سنج در زوایای ۰، ۹۰ و ۲۲۵ درجه است. سپس، سوراخی کوچک با عمق اندکی بزرگتر از قطر سوراخ در مرکز روزت ایجاد می‌شود. این سوراخ به طور محلی تنش‌ها را در محیط پیرامون آزاد کرده، کرنش‌های رها شده به وسیله سه کرنش‌سنج روی روزت اندازه‌گیری می‌شوند. کرنش رها شده در روش سوراخکاری مرکزی با ضرایب تطابق به تنش پسماند موجود در نمونه تبدیل می‌شود. روش سوراخکاری مرکزی برای تعیین اندازه و گرادینان تنش در عمق مواد همسانگرد بهبود داده شده است. روشهای متعددی برای تخمین حوزه تنش غیریکنواخت از طریق سوراخکاری مرحله‌ای و ثبت کرنش‌های رها شده در هر مرحله از سوراخکاری وجود دارد.

از جمله روشهای تعیین حوزه تنش غیریکنواخت می‌توان به روش کرنش مرحله‌ای (incremental strain method)، روش تنش متوسط (average stress method)، روش مجموعه توانی (power series method) و روش انتگرالی (integral method) اشاره کرد [۲،۳]. روش اسپلاین (Spline method) [۴] و روش سوراخکاری عمیق (deep-hole method) [۵] نیز از روشهای قابل اشاره هستند.

در کامپوزیتها عدم تطابق ضرایب انبساط گرمایی الیاف و ماتریس، انقباض و انبساط متفاوت لایه‌های متوالی به دلیل اختلاف جهات اصلی آنها و انجماد غیریکنواخت قطعه به علت اختلافهای شدید دما حین ساخت سبب ایجاد تنشهای پسماند می‌شود. اندازه این تنشها به ساختار چند لایه، خواص مواد لایه‌ها و فرایند ساخت بستگی دارد. تنشهای پسماند در کامپوزیتها بازده و کارایی سازه را کاهش داده، باعث ترک برداشتن ماتریس، لایه لایه شدن سازه، پاره شدن الیاف و تاب برداشتن در چند لایه‌های نامتقارن می‌شوند. روش سوراخکاری مرکزی برای تعیین تنشهای پسماند در مواد ناهمسانگرد در پژوهشهای علمی بررسی شده است [۱۲-۶]. برای ارتباط تنش و کرنش در مواد ناهمسانگرد از سه ضریب استفاده شد [۶]، اما مشخص شد که سه ضریب کافی نبوده، ماتریس ضرایب برای ارتباط تنش و کرنش در مواد ناهمسانگرد لازم است [۸]. روش تحلیلی که در این پژوهش ارائه شده است [۸]، برای دو حالت خاص از مواد ناهمسانگرد است. همچنین، نسبت ثابت مدول برشی به مدول صفحه‌ای در مدل تحلیلی آنها کاربرد معادلات استفاده شده را محدود کرده است. استفاده از سه ضریب برای ارتباط تنش و کرنش در لایه‌های زیر چند لایه‌های کامپوزیتی نیز بررسی شده است [۹،۱۰]. این ضرایب به روش اجزای محدود محاسبه شده‌اند. در پژوهشی با استفاده از ضرایب ارائه شده [۸] تنشهای پسماند در سطح



شکل ۱ نقاط کرنش سنجی و جهات اندازه‌گیری کرنش یک روزت در صفحه ناهمسانگرد با سوراخ دایره‌ای.

### توزیع تنش اطراف سوراخ در ماده ناهمسانگرد

رهاسازی تنش و کرنش در مواد ناهمسانگرد متفاوت از مواد همسانگرد است. این امر به ماهیت مواد ناهمسانگرد و تعداد ثابت‌های کشسان آنها مربوط است. صفحه نامحدود ناهمسانگرد با سوراخ بیضوی که قطر بزرگ آن  $a$  و قطر کوچک آن  $b$  است در شکل ۲ نشان داده شده است. توزیع تنش در صفحه‌ای نامحدود که تحت اثر نیروی در واحد سطح  $(P)$  و راستای  $\alpha$  نسبت به محور  $X$  قرار دارد، به کمک معادله‌های زیر بیان می‌شود [۱۲]:

$$\sigma_x = P \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{Re}[S_1 \phi_1'(z_1) + S_2 \psi_1'(z_2)] \quad (17)$$

$$\sigma_y = P \sin^2 \alpha + 2 \operatorname{Re}[\phi_1'(z_1) + \psi_1'(z_2)] \quad (18)$$

$$\sigma_{xy} = P \sin \alpha \cos \alpha - 2 \operatorname{Re}[S_1 \phi_1'(z_1) + S_2 \psi_1'(z_2)] \quad (19)$$

که در این معادلات:

$$\begin{aligned} \phi_1(z_1) = & -\frac{iP(a - iS_1b)}{2(S_1 - S_2)} \times \\ & \left\{ \frac{b(S_2 \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + S_1^2 b^2)}} \right. \\ & \left. + \frac{ia(2S_2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + S_1^2 b^2)}} \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

تنشهای صفحه‌ای را می‌توان به سه جزء تنش در راستای الیاف، تنش در جهت عمود بر الیاف و تنش برشی دسته‌بندی کرد.

نقاط کرنش سنجی یک روزت و جهات اندازه‌گیری کرنش در شکل ۱ نشان داده شده است. سه نقطه در مراکز سه کرنش سنج روزت به عنوان نقاط کرنش سنجی در نظر گرفته شده است. نقطه ۱ در مرکز کرنش سنج (۱)، کرنش را در راستای الیاف اندازه‌گیری می‌کند. کرنش سنج (۲) در راستای عمود بر الیاف کرنش عمودی و کرنش سنج (۳) در راستای ۴۵ درجه، کرنش شعاعی را در راستای ۴۵ درجه اندازه‌گیری می‌کند.

نسبت شعاع روزت به شعاع سوراخ  $P = R/a$  است. هنگامی که صفحه در اثر نیروی واحد سطح  $(P)$  در راستای الیاف قرار گیرد، مقادیر کرنش قبل از سوراخکاری  $(\epsilon_b)$  برابر است با:

$$\epsilon_b^1 = \frac{P}{E_x} \quad (8)$$

$$\epsilon_b^2 = -\nu_{xy} \frac{P}{E_x} \quad (9)$$

$$\epsilon_b^3 = \frac{P}{2E_x} - \nu_{xy} \frac{P}{2E_x} \quad (10)$$

هنگامی که صفحه تحت تنش در راستای عمود بر الیاف قرار گیرد، مقادیر کرنش شعاعی در نقاط کرنش سنجی با معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\epsilon_b^1 = -\nu_{xy} \frac{P}{E_x} \quad (11)$$

$$\epsilon_b^2 = \frac{P}{E_y} \quad (12)$$

$$\epsilon_b^3 = \frac{P}{2E_y} - \nu_{xy} \frac{P}{2E_x} \quad (13)$$

و مقادیر کرنش شعاعی در اثر تنش برشی در نقاط کرنش سنجی برابر است با:

$$\epsilon_b^1 = 0 \quad (14)$$

$$\epsilon_b^2 = 0 \quad (15)$$

$$\epsilon_b^3 = \frac{P}{2G_{xy}} \quad (16)$$

نقطه‌ای متمرکز است.

برای ارتباط تنش و کرنش رها شده نیز از معادله ماتریسی (۲۶)

استفاده شده است:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

ضرایب معادله (۲۶) به خواص همسانگرد نمونه، قطر و عمق سوراخ و هندسه کرنش سنج وابسته است [۸].

برای محاسبه ضرایب تطابق  $C_{11}$ ،  $C_{21}$  و  $C_{31}$  بارگذاری در جهت تیاف اعمال می‌شود. در این حالت زاویه  $\alpha = 0$  است، با حل تحلیلی تنش و کرنش این ضرایب محاسبه خواهند شد. با اعمال تنش در جهت عمود بر تیاف ( $\alpha = 90$ ) ضرایب ستون دوم ماتریس  $C_{12}$ ،  $C_{22}$  و  $C_{32}$  محاسبه می‌شوند. همچنین، با اعمال تنش در راستای  $\alpha = 45$  و محاسبه معادلات برش صفحه‌ای می‌توان ضرایب ستون سوم را محاسبه کرد [۱۲]. در ادامه این پژوهش، سه دسته ضرایب با اعمال بار کشش در راستای تیاف، کشش در راستای عمود بر تیاف و برش صفحه‌ای بدست آمده‌اند.

#### کشش در راستای تیاف و محاسبه ستون اول ماتریس ضرایب تطابق

برای محاسبه ستون اول ماتریس ضرایب در معادله (۲۶)، معادلات (۱۷) تا (۲۱) برای بارگذاری در جهت تیاف بکار گرفته شده است. در این حالت  $\alpha = 0$  بوده، برای سوراخ دایره‌ای  $b$  به  $a$  تبدیل می‌شود.

$$\phi_1'(z_1) = -\frac{iP}{2(S_1 - S_2)(1 + iS_1)} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 + S_1^2 a^2)}}\right) \quad (27)$$

$$\psi_1'(z_2) = \frac{iP}{2(S_1 - S_2)(1 + iS_2)} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - (a^2 + S_2^2 a^2)}}\right) \quad (28)$$

و مقادیر  $z_1$  و  $z_2$  در مختصات قطبی برابر است با:

$$z_1 = \rho a (\cos \theta + S_1 \sin \theta) \quad (29)$$

$$z_2 = \rho a (\cos \theta + S_2 \sin \theta) \quad (30)$$

برای ساده‌سازی مقادیر تنش در مرکز کرنش سنج (۱)، عبارت  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_1 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_1)} \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - 1 + \beta_1^2}}\right) \quad (31)$$

$$\psi_0(z_2) = \frac{iP(a - iS_2 b)}{\xi(S_1 - S_2)} \times \left\{ \frac{b(S_1 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + S_2^2 b^2)}} + \frac{ia(2S_1 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + S_2^2 b^2)}} \right\} \quad (21)$$

مقادیر  $z_1$  و  $z_2$  را می‌توان از معادله‌های زیر محاسبه کرد:

$$z_1 = x + S_1 y \quad (22)$$

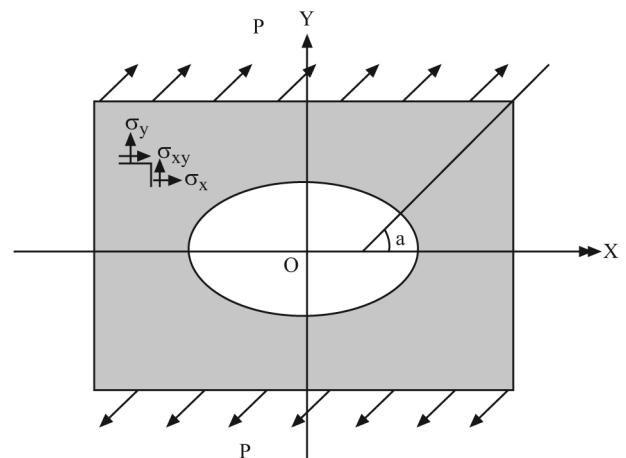
$$z_2 = x + S_2 y \quad (23)$$

$$S_1 = i\beta_1 \quad (24)$$

$$S_2 = i\beta_2 \quad (25)$$

#### توزیع تنش و کرنش در نقاط کرنش سنجی ریزت در ماده ناهمسانگرد و تعیین ضرایب تطابق

برای ماده ناهمسانگرد با سوراخ دایره‌ای این معادله‌ها قابل ساده شدن است. در این حالت  $a=b$  بوده، راستای تیاف در جهت محور مختصات  $X$  در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، زاویه  $\alpha$  راستای بارگذاری نسبت به راستای تیاف است. در حل دقیق فرض می‌شود، تنش در سراسر ضخامت قطعه ناهمسانگرد، یکنواخت است. همچنین، ضخامت صفحه کم بوده، آزاد شدن کرنشهای پسماند پس از سوراخکاری به شکل کشسان است. هر کرنش سنج، از سه کرنش سنج ریزت نیز در



شکل ۲ صفحه نامحدود ناهمسانگرد تحت کشش با سوراخ بیضوی.

مؤلفه های تنش در نقطه (۳) برابر است با:

$$\sigma_x = P[1 + \text{Re}(\beta_1^* \lambda_5 - \beta_2^* \lambda_6)] \quad (45)$$

$$\sigma_y = \text{Re}[P(-\lambda_5 + \lambda_6)] \quad (46)$$

$$\sigma_{xy} = \text{Re}[P(i\beta_1 \lambda_5 - i\beta_2 \lambda_6)] \quad (47)$$

بنابراین کرنشهای روی محور (on-axis) برابر است با:

$$\varepsilon_x = \frac{P}{E_x} + \frac{P}{E_x} \text{Re}[(\beta_1^* + v_{xy})\lambda_5 - (\beta_2^* + v_{xy})\lambda_6] \quad (48)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{Pv_{xy}}{E_x} + \frac{P}{E_x} \text{Re}[-\beta_1^*(\beta_2^* + v_{xy})\lambda_5 + \beta_2^*(\beta_1^* + v_{xy})\lambda_6] \quad (49)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{E_x} \text{Re}[P[i\beta_1(\beta_1^* + \beta_2^* + 2v_{xy})\lambda_5 - i\beta_2(\beta_1^* + \beta_2^* + 2v_{xy})\lambda_6]] \quad (50)$$

با تعریف مقادیر  $\eta_1$  و  $\eta_2$  در معادله های (۵۱) و (۵۲)، معادله مقدار کرنش شعاعی که می توان در مرکز کرنش سنج (۳) اندازه گیری کرد، به طور ساده تر قابل بیان است:

$$\eta_1 = (\beta_1^* + v_{xy} - \beta_1^* v_{xy} - \beta_1^* \beta_2^* + i\beta_1(\beta_1^* + \beta_2^* + 2v_{xy})) \quad (51)$$

$$\eta_2 = (\beta_2^* + v_{xy} - \beta_2^* v_{xy} - \beta_1^* \beta_2^* + i\beta_2(\beta_1^* + \beta_2^* + 2v_{xy})) \quad (52)$$

مقدار کرنش شعاعی در مرکز کرنش سنج (۳) برابر است با:

$$\varepsilon_h^3 = \frac{P}{2E_x}(1 - v_{xy}) + \frac{P}{2E_x} \text{Re}[\eta_1 \lambda_5 - \eta_2 \lambda_6] \quad (53)$$

با در نظر گرفتن مقدار نیروی واحد بر واحد سطح ( $P=1 \text{ N/m}^2$ ) مقادیر تنش روی محور مربوط به لایه ناهمسانگرد کربن - اپوکسی  $5208 / 3300$  هنگامی که تحت تنش در راستای الیاف قرار گیرد، در شکل ۳ نشان داده شده است. معادله های (۸) تا (۱۰) مقادیر کرنش اندازه گیری شده به کمک سه کرنش سنج روزت را در صفحه ای ناهمسانگرد تحت تنش در راستای الیاف نشان می دهد. معادله های (۳۶)، (۴۲) و (۵۳) نیز همان مقادیر را در صفحه سوراخدار بیان می کند. کرنشهای رها شده در روش سوراخکاری مرکزی از معادله (۵۴) بدست می آیند:

$$\varepsilon_R^i = \varepsilon_h^i - \varepsilon_b^i \quad i = 1, 2, 3 \quad (54)$$

$$\lambda_7 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_2)} \left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - 1 + \beta_2^2}}\right) \quad (32)$$

مؤلفه های تنش در مرکز کرنش سنج (۱) برابر است با:

$$\sigma_x = P[1 + (\beta_1^* \lambda_1 - \beta_2^* \lambda_2)] \quad (33)$$

$$\sigma_y = P[-\lambda_1 + \lambda_2] \quad (34)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (35)$$

بنابراین، مقدار کرنش در کرنش سنج (۱) با جایگزینی مقادیر معادله (۳۳) تا (۳۵) در معادله (۲) بدست می آید:

$$\varepsilon_h^1 = \frac{P}{E_x} [1 + (\beta_1^* + v_{xy})\lambda_1 - (\beta_2^* + v_{xy})\lambda_2] \quad (36)$$

برای ساده سازی مقادیر تنش در مرکز کرنش سنج (۲)، می توان عبارت  $\lambda_3$  و  $\lambda_4$  را با معادله (۳۷) و (۳۸) تعریف کرد:

$$\lambda_3 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_1)} \left(1 - \frac{\rho\beta_1}{\sqrt{\rho^2\beta_1^2 - \beta_1^2 + 1}}\right) \quad (37)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_2)} \left(1 - \frac{\rho\beta_2}{\sqrt{\rho^2\beta_2^2 - \beta_2^2 + 1}}\right) \quad (38)$$

بنابراین، مؤلفه های تنش در مرکز کرنش سنج (۲) برابر است با:

$$\sigma_x = P[1 + (\beta_1^* \lambda_3 - \beta_2^* \lambda_4)] \quad (39)$$

$$\sigma_y = P[-\lambda_3 + \lambda_4] \quad (40)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (41)$$

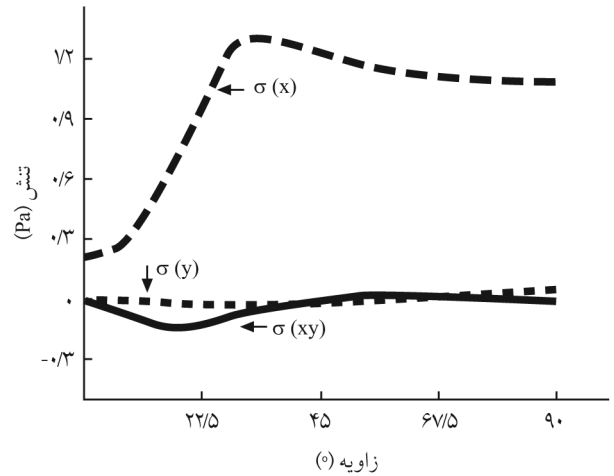
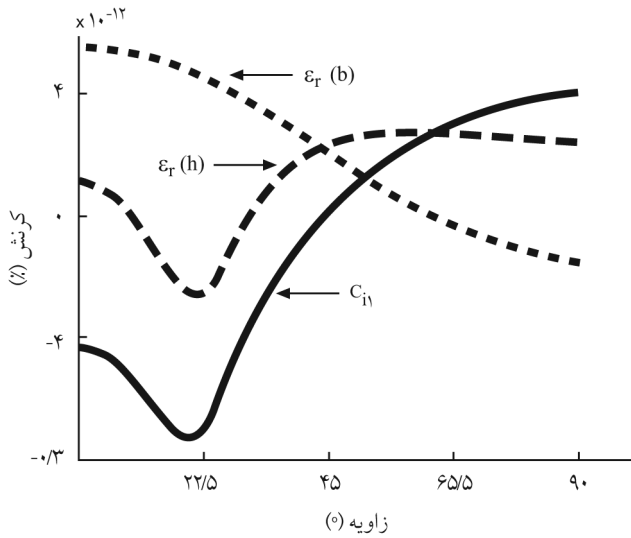
مقدار کرنش در کرنش سنج (۲) برابر است با:

$$\varepsilon_h^2 = \frac{P}{E_x} [-v_{xy} - \beta_1^*(\beta_2^* + v_{xy})\lambda_3 + \beta_2^*(\beta_1^* + v_{xy})\lambda_4] \quad (42)$$

برای تعیین مقادیر کرنش شعاعی در مرکز کرنش سنج (۳) می توان نوشت:

$$\lambda_5 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_1)} \left(1 - \frac{\rho(1 + i\beta_1)}{\sqrt{(\rho^2 - 2)(1 - \beta_1^2) + 2i\beta_1\rho^2}}\right) \quad (43)$$

$$\lambda_6 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)(1 - \beta_2)} \left(1 - \frac{\rho(1 + i\beta_2)}{\sqrt{(\rho^2 - 2)(1 - \beta_2^2) + 2i\beta_2\rho^2}}\right) \quad (44)$$



شکل ۳ مقادیر تنش روی محور در دایره کرنش سنجی اطراف سوراخ در لایه ناهمسانگرد تحت تنش در راستای الیاف.

شکل ۴ مقادیر کرنش شعاعی روی دایره کرنش سنجی اطراف سوراخ در لایه ناهمسانگرد و ستون اول ماتریس ضرایب تطابق.

بارگذاری در جهت عمود بر الیاف بکار گرفته شوند. در این حالت زاویه بارگذاری  $\alpha = 90^\circ$  است. با جایگذاری و مشتق از معادله های (۲۰) و (۲۱) در این حالت:

$$\phi_0'(z_1) = -\frac{PS_2}{2(S_1 - S_2)(1 + iS_1)} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 + S_1^2 a^2)}}\right) \quad (59)$$

$$\psi_0'(z_2) = \frac{-PS_1}{2(S_1 - S_2)(1 + iS_2)} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - (a^2 + S_2^2 a^2)}}\right) \quad (60)$$

و با جایگذاری مقادیر  $z_1$  و  $z_2$  از معادله های (۲۲) تا (۲۵)، مؤلفه های تنش در مرکز کرنش سنج (۱) روزت بدست خواهند آمد:

$$\sigma_x = -P[\beta_1^2 \beta_2 \lambda_1 - \beta_1 \beta_2^2 \lambda_2] \quad (61)$$

$$\sigma_y = P[1 + (\beta_2 \lambda_1 - \beta_1 \lambda_2)] \quad (62)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (63)$$

بنابراین، مقدار کرنش در کرنش سنج (۱) با جایگزینی مقادیر معادله های (۵۹) و (۶۰) در معادله (۲) بدست می آید:

$$\epsilon_h^1 = -\frac{P}{E_x} [v_{xy} + \beta_2 (\beta_1^2 + v_{xy}) \lambda_1 - \beta_1 (\beta_2^2 + v_{xy}) \lambda_2] \quad (64)$$

و به همین ترتیب مقادیر تنش در مرکز کرنش سنج (۲) برابر است با:

$$\sigma_x = -P[\beta_1^2 \beta_2 \lambda_3 - \beta_1 \beta_2^2 \lambda_4] \quad (65)$$

که در این معادله زیروند  $i$  شماره کرنش سنج،  $\epsilon_R^i$  کرنش رها شده،  $\epsilon_h^i$  کرنش قبل از سوراخکاری و  $\epsilon_h^i$  کرنش پس از سوراخکاری است. ضرایب تطابق با معادله (۵۵) معین می شوند:

$$C_{i1} = \frac{\epsilon_R^i}{P} \quad i = 1, 2, 3 \quad (55)$$

بنابراین، ضرایب تطابق ستون اول از معادله های تحلیلی زیر برای هر ماده ناهمسانگرد قابل محاسبه است:

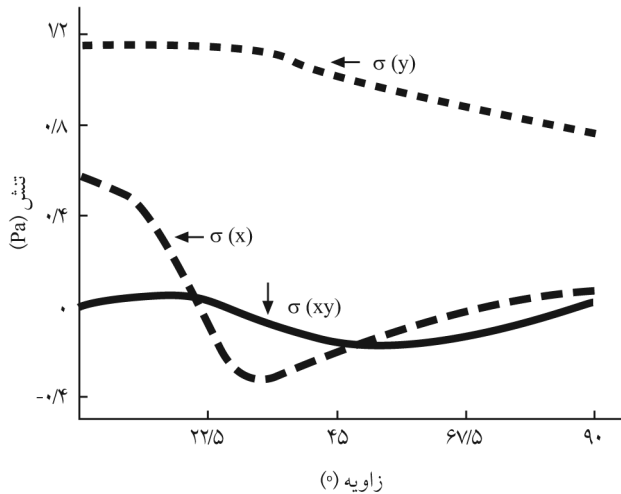
$$C_{11} = \frac{1}{E_x} [(\beta_1^2 + v_{xy}) \lambda_1 - (\beta_2^2 + v_{xy}) \lambda_2] \quad (56)$$

$$C_{21} = \frac{1}{E_x} [-\beta_1^2 (\beta_2^2 + v_{xy}) \lambda_3 + \beta_2^2 (\beta_1^2 + v_{xy}) \lambda_4] \quad (57)$$

$$C_{31} = \frac{1}{2E_x} \text{Re}[\eta_1 \lambda_5 - \eta_2 \lambda_6] \quad (58)$$

مقادیر کرنش شعاعی مربوط به لایه ناهمسانگرد کربن - اپوکسی ۵۲۰۸ / ۳۰۰ در شکل ۴ نشان داده شده است. مقادیر کرنش قبل و پس از سوراخکاری به ترتیب با  $\epsilon_r(b)$  و  $\epsilon_r(h)$  مشخص شده است. ضرایب تطابق ستون اول نیز به شکل منحنی ارائه شده است.

**ککش در راستای عمود بر الیاف و محاسبه ستون دوم ماتریس ضرایب تطابق**  
برای محاسبه ستون دوم ماتریس ضرایب تطابق، لازم است معادلات



شکل ۵ مقادیر تنش روی محور در دایره کرنش سنجی اطراف سوراخ برای لایه ناهمسانگرد تحت تنش در راستای عمود بر الیاف.

$$C_{i\gamma} = \frac{\varepsilon_{Ri}}{P} \quad i=1,2,3 \quad (73)$$

بنابراین، روابط تحلیلی ستون دوم ماتریس ضرایب تطابق، به شکل زیر قابل بیان هستند:

$$C_{1\gamma} = \frac{1}{E_x} [-\beta_2 (\beta_1^2 + \nu_{xy}) \lambda_1 + \beta_1 (\beta_2^2 + \nu_{xy}) \lambda_2] \quad (74)$$

$$C_{2\gamma} = \frac{1}{E_x} [\beta_1 \beta_2 (\beta_2^2 + \nu_{xy}) \lambda_3 - \beta_1 \beta_2 (\beta_1^2 + \nu_{xy}) \lambda_4] \quad (75)$$

$$C_{3\gamma} = \frac{1}{2E_x} \text{Re}[-\beta_2 \eta_1 \lambda_5 + \beta_1 \eta_2 \lambda_6] \quad (76)$$

مقادیر کرنش شعاعی لایه ناهمسانگرد کربن-اپوکسی  $T3300/5208$  تحت تنش در راستای عمود بر الیاف در شکل ۶ نشان داده شده است. مقادیر کرنش قبل و پس از سوراخکاری به ترتیب با  $\varepsilon_p(b)$  و  $\varepsilon_p(h)$  مشخص شده است. ضرایب تطابق ستون دوم نیز به شکل منحنی ارائه شده است.

#### برش صفحه‌ای و محاسبه ستون سوم ماتریس ضرایب تطابق

هنگامی که صفحه‌ای نامحدود ناهمسانگرد تحت کشش در راستای  $45^\circ$  درجه قرار گیرد، تمامی اجزای تنش صفحه‌ای در آن صفحه ظاهر می‌شوند. با استفاده از معادلاتی که در دو بخش قبل بدست آمده است، می‌توان معادلات مربوط به کشش در دو راستا را حذف کرده، معادلات برش صفحه‌ای را در نقاط کرنش سنجی استخراج کرد. برای این منظور معادلات تنش نمونه‌ای تحت کشش  $2P$  در راستای  $45^\circ$  درجه مورد

$$\sigma_y = P[1 + \beta_2 \lambda_3 - \beta_1 \lambda_4] \quad (66)$$

$$\sigma_{xy} = 0 \quad (67)$$

بنابراین مقدار کرنش در کرنش سنج (۲) برابر است با:

$$\varepsilon_h^2 = \frac{P}{E_x} [\beta_1^2 \beta_2^2 + \beta_1^2 \beta_2 (\beta_2^2 + \nu_{xy}) \lambda_3 - \beta_1 \beta_2^2 (\beta_1^2 + \nu_{xy}) \lambda_4] \quad (68)$$

کرنش سنج (۳) کرنش شعاعی را اندازه‌گیری می‌کند، بنابراین ابتدا تنشهای روی محور در مرکز کرنش سنج (۳) محاسبه می‌شود. با استفاده از تنشهای روی محور کرنشهای روی محور بدست می‌آید. با استفاده از کرنشهای روی محور، کرنشهای خارج محور (off-axis) و کرنش شعاعی محاسبه می‌شود. مؤلفه‌های تنش روی محور در مرکز کرنش سنج (۳) روزت، برابر است با:

$$\sigma_x = -P[\text{Re}(\beta_1^2 \beta_2 \lambda_5 - \beta_1 \beta_2^2 \lambda_6)] \quad (69)$$

$$\sigma_y = P[1 + \text{Re}(\beta_2 \lambda_5 - \beta_1 \lambda_6)] \quad (70)$$

$$\sigma_{xy} = \text{Re}[P(-i\beta_1 \beta_2 \lambda_5 + i\beta_1 \beta_2 \lambda_6)] \quad (71)$$

با محاسبه کرنشهای روی محور در مرکز کرنش سنج (۳)، مقدار کرنش شعاعی در مرکز این کرنش سنج به شکل زیر قابل بیان است:

$$\varepsilon_h^2 = \frac{P}{2E_x} (\beta_1^2 \beta_2^2 - \nu_{xy}) + \frac{P}{2E_x} \text{Re}[-\beta_2 \eta_1 \lambda_5 + \beta_1 \eta_2 \lambda_6] \quad (72)$$

با در نظر گرفتن مقدار نیروی واحد بر واحد سطح ( $P=1 \text{ N/m}^2$ ) مقادیر تنش روی محور مربوط به لایه ناهمسانگرد کربن-اپوکسی  $T3300/5208$  هنگامی که تحت تنش در راستای عمود بر الیاف قرار گیرد، در شکل ۵ نشان داده شده است.

برای تعیین ضرایب تطابق، محاسبه کرنش رها شده طی فرایند سوراخکاری لازم است. تفاضل کرنش قبل از سوراخکاری و کرنش پس از سوراخکاری در نقاط کرنش سنجی روزت، کرنش رها شده را بیان می‌کند. معادله‌های (۱۱) تا (۱۳) مقادیر کرنش اندازه‌گیری شده به وسیله سه کرنش سنج روزت را در صفحه‌ای ناهمسانگرد تحت تنش در راستای عمود بر الیاف بیان می‌کند. معادله‌های (۶۴)، (۶۸) و (۷۲) نیز همان مقادیر را در صفحه سوراخدار بیان می‌کند. کرنشهای رها شده در روش سوراخکاری مرکزی از معادله (۵۴) بدست آمده، ضرایب تطابق از معادله (۷۳) محاسبه می‌شوند:

بنابراین، مقدار کرنش در کرنش سنج (۱) با جایگزینی مقادیر معادله های (۸۲) و (۸۳) در معادله (۲) بدست می آید:

$$\varepsilon_h^1 = 0 \quad (85)$$

فرایند ذکر شده برای کرنش سنج‌های (۲) و (۳) روزت نیز تکرار می شود. مؤلفه های تنش صفحه ای نامحدود ناهمسانگرد، تحت کشش  $2P$  در راستای  $45^\circ$  در نقطه کرنش سنجی (۲) با معادلات زیر قابل بیان است:

$$\sigma_x = P[1 + \beta_1^2(1 - \beta_2)\lambda_3 - \beta_2^2(1 - \beta_1)\lambda_4] \quad (86)$$

$$\sigma_y = P[1 - (1 - \beta_2)\lambda_3 + (1 - \beta_1)\lambda_4] \quad (87)$$

$$\sigma_{xy} = P[1 - \beta_1(1 + \beta_2)\lambda_3 + \beta_2(1 + \beta_1)\lambda_4] \quad (88)$$

با تفاضل معادلات حاصل از کشش در راستای الیاف (معادله های (۳۹) تا (۴۱)) و معادلات کشش در راستای عمود بر الیاف (معادله های (۶۵) تا (۶۷)) در مرکز کرنش سنج (۲)، مؤلفه های تنش ناشی از برش صفحه ای در این نقطه بدست خواهند آمد:

$$\sigma_x = 0 \quad (89)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (90)$$

$$\sigma_{xy} = P[1 - \beta_1(1 + \beta_2)\lambda_3 + \beta_2(1 + \beta_1)\lambda_4] \quad (91)$$

بنابراین، مقدار کرنش در کرنش سنج (۲) برابر است با:

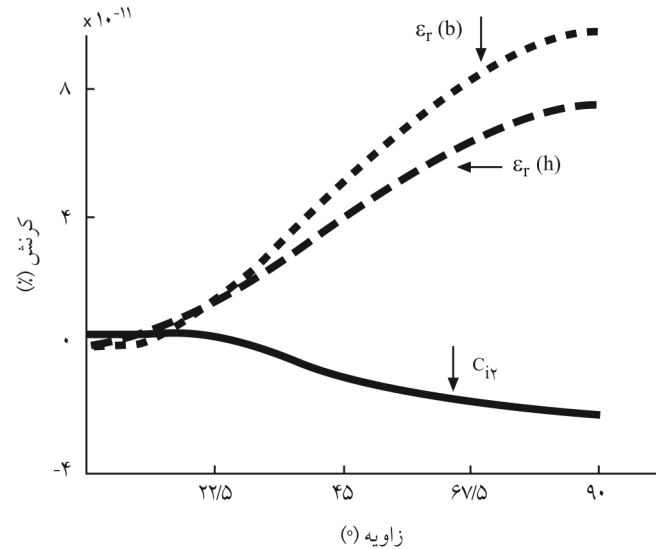
$$\varepsilon_h^2 = 0 \quad (92)$$

با تکرار فرایند یاد شده برای کرنش سنج (۳)، مؤلفه های تنش ناشی از برش خالص در نقطه کرنش سنجی (۳) بدست خواهند آمد. مؤلفه های تنش صفحه ای ناهمسانگرد، تحت کشش  $2P$  در راستای  $45^\circ$  در نقطه کرنش سنجی (۳) با معادلات زیر قابل بیان است:

$$\sigma_x = P[1 + \operatorname{Re}(\beta_1^2(1+i)(1+i\beta_2)\lambda_5 - \beta_2^2(1+i)(1+i\beta_1)\lambda_6)] \quad (93)$$

$$\sigma_y = P[1 + \operatorname{Re}(-(1+i)(1+i\beta_2)\lambda_5 + (1+i)(1+i\beta_1)\lambda_6)] \quad (94)$$

$$\sigma_{xy} = P[1 + \operatorname{Re}(i\beta_1(1+i)(1+i\beta_2)\lambda_5 - i\beta_2(1+i)(1+i\beta_1)\lambda_6)] \quad (95)$$



شکل ۶ مقادیر کرنش شعاعی روی دایره کرنش سنجی اطراف سوراخ در لایه ناهمسانگرد و ستون دوم ماتریس ضرایب تطابق.

توجه قرار گرفته است. در این حالت توابع تحلیلی را با معادلات زیر می توان بیان کرد:

$$\phi_1(z_1) = -\frac{iP(1+S_2)(1+i)}{\xi(S_1-S_2)(1+iS_1)} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 + S_1^2 a^2)}}\right) \quad (97)$$

$$\psi_1(z_2) = \frac{iP(1+S_1)(1+i)}{\eta(S_1-S_2)(1+iS_2)} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - (a^2 + S_2^2 a^2)}}\right) \quad (98)$$

مؤلفه های تنش در مرکز کرنش سنج (۱) روزت برابرند با:

$$\sigma_x = P[1 + \beta_1^2(1 - \beta_2)\lambda_1 - \beta_2^2(1 - \beta_1)\lambda_2] \quad (99)$$

$$\sigma_y = P[1 - (1 - \beta_2)\lambda_1 + (1 - \beta_1)\lambda_2] \quad (100)$$

$$\sigma_{xy} = P[1 - \beta_1(1 + \beta_2)\lambda_1 + \beta_2(1 + \beta_1)\lambda_2] \quad (101)$$

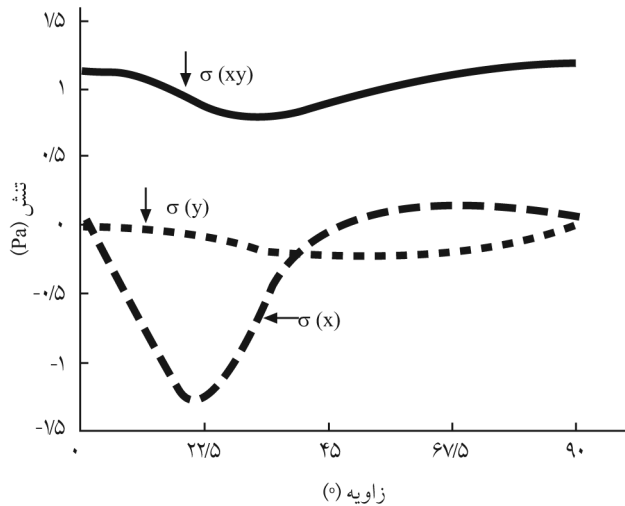
با تفاضل معادلات حاصل از کشش در راستای الیاف (معادله های (۳۳) تا (۳۵)) و معادلات کشش در راستای عمود بر الیاف (معادله های (۶۱) تا (۶۳)) در مرکز کرنش سنج (۱)، معادلات حاصل از برش خالص در این نقطه بدست خواهند آمد:

$$\sigma_x = 0 \quad (102)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (103)$$

$$\sigma_{xy} = P[1 - \beta_1(1 + \beta_2)\lambda_1 + \beta_2(1 + \beta_1)\lambda_2] \quad (104)$$





شکل ۷ مقادیر تنش روی محور در دایره کرنش سنجی اطراف سوراخ در لایه ناهمسانگرد تحت برش صفحه‌ای.

با استفاده از کرنش رها شده حاصل از برش خالص معادلات زیر بدست می‌آید:

$$C_{13} = 0 \quad (104)$$

$$C_{23} = 0 \quad (105)$$

$$C_{33} = \frac{1}{2E_x} \text{Re}[i(1 + \beta_2)\eta_1\lambda_0 - i(1 + \beta_1)\eta_2\lambda_6] \quad (106)$$

در شکل ۸ مقادیر کرنش شعاعی لایه ناهمسانگرد کربن - اپوکسی  $T_{30.0/52.0.8}$  در برش صفحه‌ای نشان داده شده است. مقادیر کرنش قبل و پس از سوراخکاری با  $\epsilon_r(b)$  و  $\epsilon_r(h)$  مشخص شده است. ضرایب تطابق ستون سوم نیز به شکل منحنی ارائه شده است.

در نمودارهای ذکر شده بیش از آنچه به مقادیر عددی آن توجه شود، باید به کیفیت نمودارهای ارائه شده توجه کرد. به عنوان مثال شکل ۸ نشان می‌دهد، هر گاه کرنش سنجی (۱) و (۲) در راستای الیاف و عمود بر آن قرار نگیرند، دو ضریب  $C_{13}$  و  $C_{23}$  صفر نیستند. در این حالت تمامی آرایه‌های ماتریس ضرایب دارای مقدار غیر صفر خواهند بود که با استفاده از معادله‌های ارائه شده قابل محاسبه‌اند.

### نتایج بدست آمده از حل تحلیلی

ضرایب تطابق که با معادلات (۵۵)، (۷۳) و (۱۰۳) بیان شده‌اند، تنها به ثابت‌های کشسان ماده و نسبت قطر روزت به قطر سوراخ ( $\rho$ ) وابسته‌اند. با استفاده از نرم افزار Matlab [۱۴] برنامه رایانه‌ای آماده شده است که با

با تفاضل مؤلفه‌های تنش حاصل از کشش در راستای الیاف (معادله‌های (۴۵) تا (۴۷)) و مؤلفه‌های تنش حاصل از کشش در راستای عمود بر الیاف (معادله‌های (۶۹) تا (۷۱)) در مرکز کرنش سنج (۳)، مؤلفه‌های تنش ناشی از برش خالص در این نقطه بدست خواهند آمد:

$$\sigma_x = P[\text{Re}(i\beta_1^*(1 + \beta_2)\lambda_0 - i\beta_2^*(1 + \beta_1)\lambda_6)] \quad (96)$$

$$\sigma_y = P[\text{Re}(-i(1 + \beta_2)\lambda_0 + i(1 + \beta_1)\lambda_6)] \quad (97)$$

$$\sigma_{xy} = P[1 + \text{Re}(-\beta_1(1 + \beta_2)\lambda_0 + \beta_2(1 + \beta_1)\lambda_6)] \quad (98)$$

بنابراین، کرنشهای روی محور برابر است با:

$$\epsilon_x = \frac{P}{E_x} \text{Re}[i(1 + \beta_2)(\beta_1^* + \nu_{xy})\lambda_0 - i(1 + \beta_1)(\beta_2^* + \nu_{xy})\lambda_6] \quad (99)$$

$$\epsilon_y = \frac{P}{E_x} \text{Re}[-i\beta_1^*(1 + \beta_2)(\beta_2^* + \nu_{xy})\lambda_0 + i\beta_2^*(1 + \beta_1)(\beta_1^* + \nu_{xy})\lambda_6] \quad (100)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{P}{E_x} (\beta_1^* + \beta_2^* + \nu_{xy}) + \frac{P}{E_x} \text{Re}[-\beta_1(1 + \beta_2)(\beta_1^* + \beta_2^* + \nu_{xy})\lambda_0 + \beta_2(1 + \beta_1)(\beta_1^* + \beta_2^* + \nu_{xy})\lambda_6] \quad (101)$$

مقدار کرنش شعاعی که می‌توان در مرکز کرنش سنج (۳) اندازه‌گیری کرد، با معادله (۱۰۲) بیان می‌شود:

$$\epsilon_h^* = \frac{P}{2E_x} (\beta_1^* + \beta_2^* + \nu_{xy}) + \frac{P}{E_x} \text{Re}[i(1 + \beta_2)\eta_1\lambda_0 - i(1 + \beta_1)\eta_2\lambda_6] \quad (102)$$

با در نظر گرفتن مقدار نیروی واحد ( $P=1 \text{ N/m}^2$ ) بر واحد سطح مقادیر تنش روی محور مربوط به لایه همسانگرد کربن - اپوکسی  $T_{30.0/52.0.8}$  بدست آمده است. منحنیهای مربوط به مقادیر تنش در برش صفحه‌ای در شکل ۷ نشان داده شده است.

ستون سوم ماتریس ضرایب تطابق، با تفاضل کرنش قبل از سوراخکاری و کرنش پس از سوراخکاری نمونه تحت برش و در نقاط کرنش سنجی روزت محاسبه می‌شوند:

$$C_{i3} = \frac{\epsilon_{iR}}{P} \quad i=1,2,3 \quad (103)$$

جدول ۲ ضرایب تطابق (V/GPa) حاصل از حل دقیق در چند نمونه کامپوزیتی.

نمونه	AS/۳۵۰۱	B ۴/۵۵۰۵	T ۳۰۰/۵۲۰۸
ضریب			
C <sub>۱۱</sub>	-۰/۰۰۵۵۳۹	-۰/۰۰۳۹۱۵	-۰/۰۰۴۳۶۳
C <sub>۲۱</sub>	۰/۰۰۴۸۳۷	۰/۰۰۲۸۹۸	۰/۰۰۳۹۸۰
C <sub>۳۱</sub>	۰/۰۰۰۲۶۰	۰/۰۰۰۰۶۷	۰/۰۰۰۳۱۵
C <sub>۱۲</sub>	۰/۰۰۳۸۱۳	۰/۰۰۱۸۱۶	۰/۰۰۲۸۷۸
C <sub>۲۲</sub>	-۰/۰۲۴۴۸۱	-۰/۰۱۸۹۹۱	-۰/۰۲۲۴۶۶
C <sub>۳۲</sub>	-۰/۰۱۰۵۳۸	-۰/۰۰۶۸۲۶	-۰/۰۰۹۵۴۸
C <sub>۳۳</sub>	-۰/۰۲۲۴۸۵	-۰/۰۱۷۱۹۶	-۰/۰۱۹۷۷۶

ضرایب تطابق در مواد ناهمسانگرد و چند لایه‌های کامپوزیتی به شکل جداولی ارائه شده است [۱۲]. در این بخش با استفاده از این روش، نتایج عددی حل تحلیلی بررسی شده است.

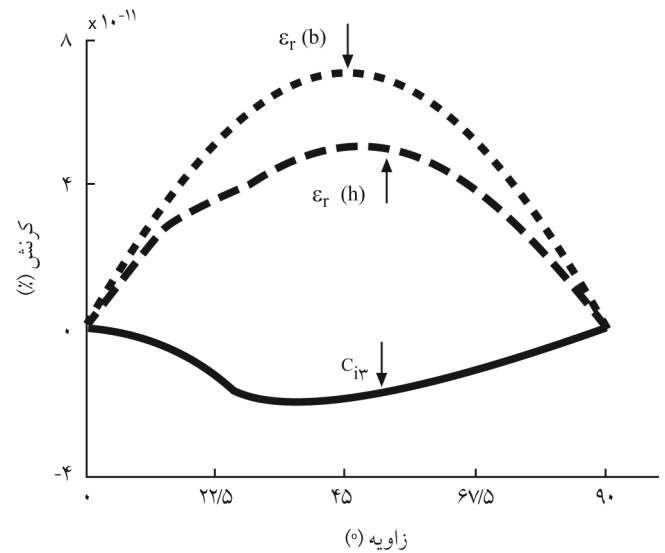
در صفحه‌ای ناهمسانگرد محل سوراخکاری و نقاط کرنش سنجی به دقت مشخص می‌شود. صحت شبکه بندی مدل با ریز کردن شبکه و همگرایی نتایج بررسی و تأیید شده است. جزء انتخاب شده از نوع ۸۲ Plane است که قابلیت کاهش سفتی و حالت میرایی اجزا را در نرم افزار ANSYS داراست. تعداد جزء مدل ۱۳۴۴ بوده، شامل ۱۳۸۱ گره است. برای مقایسه دقیق کرنش‌ها سه گره در مراکز سه کرنش سنج روزت قرار داده شده است. کرنش شعاعی در هر گره به عنوان متوسط کرنش اندازه گیری شده به وسیله آن کرنش سنج فرض شده، در تعیین ضرایب تطابق استفاده می‌شود. ماتریس ضرایب حاصل از شبیه سازی در جدول ۳ ارائه شده است.

#### مقایسه نتایج تحلیلی و عددی

مقایسه نتایج حل تحلیلی و حل عددی نشان می‌دهد که این مقادیر تطابق خوبی با یکدیگر داشته، معادلات ارائه شده در حل تحلیلی به درستی استخراج شده است. خطای موجود بین دو روش از معادله زیر قابل محاسبه بوده و در جدول ۴ ارائه شده است.

$$(107) \quad \text{درصد خطا} = \frac{|C_{ij}(\text{حل دقیق}) - C_{ij}(\text{شبیه سازی})|}{|C_{ij}(\text{حل دقیق})|} \times 100$$

نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که حداکثر خطای بین روش شبیه سازی سوراخکاری مرکزی و حل دقیق در تمامی موارد کمتر از ۱۰ درصد است. بنابراین، می‌توان از روابط ارائه شده با دقت قابل قبول در محاسبه



شکل ۸ مقادیر کرنش شعاعی روی دایره کرنش سنجی اطراف سوراخ در لایه ناهمسانگرد و ستون سوم ماتریس ضرایب تطابق.

داشتن ثابت‌های کشسان ماده و نسبت شعاع روزت به شعاع سوراخ (P) ضرایب تطابق را محاسبه می‌کند. در این راستا سه ماده ناهمسانگرد با خواص مندرج در جدول ۱ انتخاب شده است [۱۵].

از آنجا که ضرایب تطابق به هندسه کرنش سنج و قطر روزت وابسته‌اند، روزت به قطر نامی ۵/۱۳ mm انتخاب شد. قطر سوراخ نیز ۰/۴ قطر نامی روزت و برابر با ۲/۰۵۲ است. ضرایب حاصل از این سه ماده در جدول ۲ نشان داده شده است.

#### حل عددی به روش اجزای محدود

از روش‌های کارآمد در تعیین ضرایب تطابق و تعیین تنش‌های پسماند روش اجزای محدود است. این روش برای محاسبه و اصلاح ضرایب تطابق در مواد همسانگرد به طور گسترده استفاده شده است. با شبیه سازی فرایند سوراخکاری مرکزی به کمک روش اجزای محدود

جدول ۱ ثابت‌های کشسان چند کامپوزیت تک جهتی.

نوع	AS/۳۵۰۱	B ۴/۵۵۰۵	T ۳۰۰/۵۲۰۸
ماده	کربن - اپوکسی	بورن - اپوکسی	کربن - اپوکسی
E <sub>x</sub> (GPa)	۱۳۸	۲۰۴	۱۸۱
E <sub>y</sub> (GPa)	۸۹۶	۱۸۵	۱۰۳
G <sub>xy</sub> (GPa)	۷/۱۰	۵/۵۹	۷/۱۷
ν <sub>xy</sub>	۰/۳۰	۰/۲۳	۰/۲۸

### نتیجه‌گیری

نتایج ارائه شده در این پژوهش نشان می‌دهد که کرنشهای رها شده در مواد ناهمسانگرد ماهیتی متفاوت از کرنشهای رها شده در مواد همسانگرد دارند. بنابراین، برای تبدیل کرنشهای رها شده روش سوراخکاری مرکزی در مواد ناهمسانگرد به تنشهای پسماند موجود در سازه نمی‌توان از معادله ساده مثلثاتی که برای مواد همسانگرد ارائه شده است، استفاده کرد. در این پژوهش، به منظور تعیین تنشهای پسماند در مواد ناهمسانگرد از ماتریس ضرایب تطابق  $3 \times 3$  استفاده شده است. سپس، ضرایب تطابق برای هر ماده ناهمسانگرد و هر درجه‌ای از خواص ناهمسانگردی به شکل تحلیلی بدست آمده است. برای یک ماده ناهمسانگرد تنشهای حول سوراخ به شکل منحنی ارائه شده است. با استفاده از تنشهای روی محور کرنشهای شعاعی و ضرایب تطابق محاسبه و به شکل منحنی نمایش داده شده است. در انتها مقایسه نتایج عددی حل تحلیلی و شبیه‌سازی فرایند سوراخکاری مرکزی به روش اجزای محدود چند کامپوزیت تک جهتی انجام شده است. مقایسه نتایج بیانگر خطای کمتر از ۱۰ درصد ضرایب تطابق حاصل از روش است. هرگاه راستای دو کرنش سنج از سه کرنش سنج روزت بر محورهای اصلی ماده ناهمسانگرد منطبق باشند، دو ضریب تطابق  $C_{12}$  و  $C_{33}$  صفر خواهند بود. در این حالت برای دیگر آرایه‌های ماتریس ضرایب، روابط تحلیلی مجزا، ارائه شده است. هرگاه راستای دو کرنش سنج از سه کرنش سنج روزت بر محورهای اصلی ماده ناهمسانگرد منطبق نباشند تمامی آرایه‌های ماتریس ضرایب غیر صفر بوده و باروش ارائه شده قابل محاسبه است.

ضرایب تطابق برای صفحه ناهمسانگرد تنها به ثوابت کشسان ماده و نسبت شعاع روزت به شعاع سوراخ ( $\rho$ ) وابسته‌اند. اما، مطابق اصل سن و نان با افزایش عمق سوراخ کرنشهای قرائت شده روی سطح به کمک کرنش سنج نسبت به کرنشهای رها شده در عمق کاهش می‌یابند. بنابراین، نباید وابستگی این ضرایب به عمق سوراخکاری را فراموش کرد. معادلات ارائه شده در این پژوهش با فرض تنش صفحه‌ای، بر اساس خواص کشسان ماده، سوراخ راه‌بدر، تنش ثابت در عمقی کمتر یا مساوی قطر سوراخ و اندازه‌گیری کرنش در مرکز هر کرنش سنج به عنوان نقطه کرنش‌سنجی استخراج شده است. هرگاه از تمامی نقاط کرنش‌سنجی روزت انتگرال‌گیری شود، دقت محاسبات افزایش یافته و خطا کاهش می‌یابد.

جدول ۳ ضرایب تطابق (VGPa) حاصل از شبیه‌سازی فرایند سوراخکاری در چند نمونه کامپوزیتی.

نمونه	AS/۳۵۰۱	B ۴/۵۵۰۵	T ۳۰۰/۵۲۰۸
$C_{11}$	-۰/۰۰۵۶۱۵	-۰/۰۰۴۰۰۴	-۰/۰۰۴۴۳۸
$C_{21}$	۰/۰۰۴۵۸۱	۰/۰۰۲۸۱۲	۰/۰۰۰۳۷۷۸
$C_{31}$	۰/۰۰۰۲۸۵	۰/۰۰۰۰۷۳	۰/۰۰۰۳۴۴۸
$C_{12}$	۰/۰۰۳۹۶۲	۰/۰۰۱۸۹۰	۰/۰۰۲۹۹۵
$C_{22}$	-۰/۰۲۳۱۲۵	-۰/۰۱۸۴۳۷	-۰/۰۲۱۲۹۴
$C_{32}$	-۰/۰۰۹۹۱۹	-۰/۰۰۶۲۱۲	-۰/۰۰۸۹۰۵
$C_{33}$	-۰/۰۲۰۶۱۶	-۰/۰۱۵۷۲۹	-۰/۰۱۸۱۱۰

ضرایب تطابق و تعیین تنشهای پسماند مواد ناهمسانگرد استفاده کرد. در حل دقیق مرکز هر کرنش سنج به عنوان نقطه کرنش‌سنجی انتخاب شده است. این فرض می‌تواند باعث خطا در محاسبات شود. هرگاه از کل سطح کرنش سنج انتگرال‌گیری شود، دقت محاسبات افزایش یافته و مقدار خطای حقیقی در تعیین تنشهای پسماند کاهش می‌یابد [۱۶].

مقادیر ارائه شده در جداول ۲ و ۳ با شش رقم اعشار بیان شده است، زیرا در بعضی موارد گرد کردن اعداد باعث محاسبه خطای غیر واقعی می‌شود. حداکثر خطا نیز در کرنش سنج (۲) رخ می‌دهد که کرنش شعاعی را در راستای ۴۵ درجه اندازه‌گیری می‌کند. این امر می‌تواند ناشی از گرد کردن کرنش در راستای منطبق بر محور و محاسبه کرنش در راستای خارج از محور باشد.

جدول ۴ انحراف مقادیر ضرایب تطابق حاصل از حل تحلیلی دقیق و شبیه‌سازی فرایند سوراخکاری.

ضریب	درصد خطا		
	T ۳۰۰	B ۴	AS
$C_{11}$	۱۷۰	۲/۲۳	۱۳۶
$C_{21}$	۵/۳۵	۳/۰۳	۵/۶۱
$C_{31}$	۹/۶۱	۸/۹۵	۹/۴۶
$C_{12}$	۳/۹۲	۳/۹۰	۳/۷۴
$C_{22}$	۵/۵۰	۳/۰۰	۵/۸۶
$C_{32}$	۷/۲۳	۸/۹۹	۶/۲۴
$C_{33}$	۹/۲۰	۹/۳۲	۹/۰۶

## علائم و اختصارات

$\varepsilon_R^i$  مقادیر کرنش رها شده  
 $\sigma_x, \sigma_y$  و  $\sigma_{xy}$  مؤلفه‌های تنش  
 $\rho$  شعاع بی بعد  
 $\theta$  و  $\alpha$  زاویه  
 $S_1$  و  $S_2$  ریشه‌های معادله مشخصه ماده ناهمسانگرد  
 $\beta_1$  و  $\beta_2$  مقادیر ثابت ماده‌ای ناهمسانگرد  
 $Z_1$  و  $Z_2$  مختصات نقاط در صفحه  
 $\phi_0$  و  $\psi_0$  توابع تحلیلی  
 $P$  نیروی اعمال شده بر واحد سطح

$E_x$  و  $E_y$  مدول کشسان در راستای محوری  
 $u_{yx}$  و  $u_{xy}$  ضریب پواسون در راستای محوری  
 $G_{xy}$  مدول برشی  
 $a$  و  $b$  قطرهای کوچک و بزرگ سوراخ بیضوی  
 $C_{ij}$  ضرایب تطابق  
 $R$  فاصله مرکز سوراخ تا مرکز کرنش سنج  
 $\varepsilon_b^i$  مقادیر کرنش قبل از سوراخکاری  
 $\varepsilon_h^i$  مقادیر کرنش پس از سوراخکاری

## مراجع

- Annual Book of ASTM Standard, Determining Residual Stresses by the Hole-drilling Strain-Gage Method, ASTM E837, 2004.
- Schajer G.S., Measurement of Non-uniform Residual Stresses Using the Hole-drilling Method, Part I. Stress Calculation Procedures, *J. Eng. Mater. Technol., Trans. ASME*, **110**, 344-349, 1988.
- Schajer G.S., Measurement of Non-uniform Residual Stresses Using the Hole-drilling Method, Part II. Practical Application of the Integral Method, *J. Eng. Mater. Technol., Trans. ASME*, **110**, 338-343, 1988.
- Petrucci G. and Zuccarello B., A New Calculation Procedure for Non-uniform Residual Stress Analysis by the Hole-drilling Method, *Strain Analysis*, **33**, 27-37, 1998.
- Bateman M.G., Millera O.H., Palmera T.J., Breena C.E.P. and Kingston E.J., Measurement of Residual Stress in Thick Section Composite Laminates Using the Deep-hole Method, *Int. J. Mechanic. Sci.*, **47**, 1718-1739, 2005.
- Prasad C.B., Prabhakaran R. and Thompkins S., Determination of Calibration Constants for the Hole-drilling Residual Stress Measurement Technique Applied to Orthotropic Composites, Part I. Theoretical Considerations, *Compos. Struct.*, **8**, 105-118, 1987.
- Prasad C.B., Prabhakaran R. and Thompkins S., Determination of Calibration Constants for the Hole-drilling Residual Stress Measurement Technique Applied to Orthotropic Composites, Part II: Experimental Evaluations, *Compos. Struct.*, **8**, 165-172, 1987.
- Schajer G.S. and Yang L., Residual-Stress Measurement in Orthotropic Materials Using the Hole-drilling Method, *Experiment. Mechanic.*, **34**, 324-333, 1994.
- Sicot O., Gong X.L., Cherouat A. and Lu J., Determination of Residual Stress in Composite Laminates Using the Incremental Hole-drilling Method, *Compos. Mater.*, **37**, 831-843, 2003.
- Sicot O., Gong X.L., Cherouat A. and Lu J., Influence of Experimental Parameters on Determination of Residual Stress Using the Incremental Hole-drilling Method, *Compos. Sci. Technol.*, **64**, 171-180, 2004.
- Shokrieh M.M. and Kamali S.M., Theoretical and Experimental Studies on Residual Stresses in Laminated Polymer Composites, *J. Compos. Mater.*, **39**, 2213-2225, 2005.
- Shokrieh M.M. and Ghasemi A.R., Simulation of Central Hole drilling Process for Measurement of Residual Stresses in Isotropic, Orthotropic and Laminated Composites Plates, *J. Compos. Mater.*, (accepted), 2006.
- Savin G.N., *Stress Concentration around Holes*, Pergamon, Oxford, Chap. 3, 1961.
- Matlab, The Language of Technical Computing, Version 7.
- Tsai S.W. and Hahn H.T., *Introduction to Composite Materials*, Westport, Technomic, 1980.
- Schajer G.S., Use of Displacement Data to Calculate Strain Gauge Response in Non-uniform Strain Fields, *Strain*, **29**, 9-13, 1993.